

QUASILINEARE ELLIPTISCHE
DIFFERENTIALOPERATOREN MIT
STARKEM WACHSTUM IN DEN
TERMEN HÖCHSTER ORDNUNG

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Rüdiger Landes
aus Rottmannshart

Bochum 1976

1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546603_0027

QUASILINEARE ELLIPTISCHE
DIFFERENTIALOPERATOREN MIT
STARKEM WACHSTUM IN DEN
TERMEN HÖCHSTER ORDNUNG

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Rüdiger Landes
aus Rottmannshart

Bochum 1976

Dissertation eingereicht am

21.10.1976

Tag der mündlichen Prüfung

14.2.1977

Dekan: Prof. Dr. W. von Wahl

Referent: Prof. Dr. W. von Wahl

Koreferenten: Prof. Dr. H. Amann

Prof. Dr. C. G. Simader (Bayreuth)



I N H A L T

Einleitung	1
Bezeichnungen	4

T E I L 1

Der Operator $A(u)$ mit unbeschränktem Wachstum	5
§ 1 Der Existenzsatz und einige Beispiele	5
§ 2 Punktweise Konvergenz einer Folge von Galerkin- lösungen	9
§ 3 Beweise von Satz 1 , Korollar 1	18
§ 4 Das Variationsproblem	22

T E I L 2

Operatoren der Form $A(u) + B(u)$	28
§ 5 Der monotone Operator $B^1(u)$ mit beschränktem Wachstum	29
§ 6 Der monotone Operator $B^2(u)$ mit etwas geringerem Wachstum als $A(u)$	33
§ 7 Der unbeschränkte Operator $B^3(u)$ niedrigerer Ordnung	42
Literatur	47

Einleitung

Mit Hilfe der Theorie der monotonen Operatoren wurde in den letzten 10 - 13 Jahren in vielen Arbeiten die Existenz von schwachen Lösungen zu Randwertproblemen von quasilinearen elliptischen Differentialoperatoren in Divergenzform gezeigt. Dabei wurde der Monotoniebegriff immer wieder modifiziert, um eine neue Klasse von Differentialoperatoren betrachten zu können (vergl.: z. B. [1],[9],[2],[12],[3]).

Zunächst war das maximale Wachstum des Differentialoperators direkt mit der Norm des zugrunde liegenden Funktionenraumes (meist $W^{m,p}(\Omega)$) verbunden. Später wurde dann gezeigt (vergl.: z. B. [3],[7]), daß unter gewissen Bedingungen bei Störoperatoren niedrigerer Ordnung auf eine Wachstumsbeschränkung verzichtet werden kann. Daneben wurde, vor allem in Arbeiten von J.P. Gossez (vergl. [5],[6]) eine Theorie von monotonen Operatoren in Orlicz-Räumen entwickelt. Damit erhält man die Existenz von Lösungen zu Randwertproblemen quasilinear elliptischer Differentialoperatoren auch mit beliebig großem Wachstum in den Termen höchster Ordnung.

In allen genannten Arbeiten muß jedoch für eine Folge von Galerkin-Lösungen eine A-priori-Schranke in der Norm des zugrunde liegenden Funktionenraumes gefunden werden, so daß zumindest für die Terme höchster Ordnung das minimale und das maximale Wachstum des Operators miteinander verbunden sein müssen.

Ziel dieser Arbeit ist es nun in beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ die Existenz von schwachen Lösungen des Dirichletproblems für quasilineare elliptische Differentialoperatoren mit beliebig großem Wachstum auch in den Termen höchster Ordnung zu zeigen, dessen minimales Wachstum jedoch nur so groß ist, daß eine Folge von Galerkin-Lösungen in $W_0^{m,p}(\Omega)$ a-priori beschränkt ist.

C.G. Simader beweist nun in [11] die Existenz von schwachen Lösungen des Dirichletproblems $B(u) + G(u) = f$, wobei

$$B(u) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_\alpha(\cdot, D^{(0,m-1)}(u), D^m(u))) \quad \text{ein elliptischer}$$

Operator ist, wie ihn z. B. F.E. Browder in [2] betrachtet. In

$$G(u) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (p_\alpha \cdot g_\alpha(D^\alpha(u))) \quad \text{sind die Funktionen } p_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

und $p_\alpha \geq 0$, die stetigen Funktionen $g_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genügen einer Vorzeichenbedingung, für $|\alpha| = m$ sind sie monoton wachsend und die

durch $G_\alpha(t) := g_\alpha(t) \cdot t$ definierte Funktion ist konvex.

Im ersten Teil dieser Arbeit zeigen wir nun, daß zu einem in $W_0^{m,p}(\Omega)$ koerziven (dies sichert die Existenz einer a-priori-Schranke)

Differentialoperator $A(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(\cdot, D^{(0,m-1)}(u), D^m(u)))$

schwache Lösungen des Dirichletproblems $A(u) = f$ existieren, wenn es für fast alle $x \in \Omega$ eine strikt konvexe Funktion $F(x, \cdot): \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ gibt,

so daß $\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^\alpha} = A_\alpha(x, \xi)$ ist¹⁾. Daneben müssen noch zwei weitere Bedingungen^a erfüllt sein, die jedoch das Wachstum von $A(u)$ nicht beschränken.

Im Gegensatz zu [11] können wir also in A_α eine Abhängigkeit nicht nur von $D^\alpha(u)$, sondern von allen Ableitungen mit einer Ordnung $\leq m$ zulassen, ohne daß A_α einer Wachstumsbeschränkung unterliegt (vergl. Beispiel 2 und 3 Seite 8f). Ein koerziver Operator $G(u)$ mit den obigen Eigenschaften ist für $p_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ und g_α streng monoton wachsend ein einfacher Spezialfall unserer Bedingungen, wobei auf die Voraussetzung $g_\alpha(t) \cdot t$ konvex verzichtet werden kann, die z. B. die streng monoton wachsenden Funktionen $t - \frac{1}{2} \cdot \sin t$ und $e^t(1 - \frac{2}{3} \sin t)$ nicht erfüllen.

Setzen wir $I(u) := \int_\Omega F(\cdot, D(u)) dx - \int_\Omega f \cdot u dx$ so ist unsere

Lösung eine schwache Lösung der Eulergleichung zum Variationsproblem $I(u) = \min \{I(v) \mid v \in W_0^{m,p}(\Omega)\}$ welches unter unseren Voraussetzungen (mit einigen kleinen Einschränkungen) eine Lösung $u_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$ hat. Es ist jedoch nicht bekannt, ob unter unseren Voraussetzungen an F und f , das Minimum $u_0 \in C^m(\bar{\Omega})$ ist. Deshalb benötigt man, um zu zeigen, daß u_0 auch schwache Lösung der Eulergleichung ist, für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine von t unabhängige $L^1(\Omega)$ Schranke für den Differentialquotienten

$$\frac{1}{t} |F(x, (D(u_0 + t\phi))(x)) - F(x, (D(u_0))(x))|.$$

Die dabei auftretende Schwierigkeit ist, daß aus $F(\cdot, D(u)) \in L^1(\Omega)$ nicht immer folgt $F(\cdot, D(u_0 + \phi)) \in L^1(\Omega)$.

¹⁾ vgl. Bezeichnungen

Es kann z. B. für eine meßbare Funktion $u(x)$ mit $\exp(|u(x)|^2) \in L^1(\Omega)$, wegen $\exp(-\epsilon|u(x)|^2) = (\exp(|u(x)|^2))^{-\epsilon}$ nicht geschlossen werden, daß zu $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ein $c > 0$ existiert, derart daß $\exp(|u(x) + c \cdot \phi(x)|^2) \in L^1(\Omega)$. Ist $F(\cdot, D(u_0 \pm \phi)) \in L^1(\Omega)$, so kann man eine Schranke für den Differentialquotienten finden und erhält somit eine Bedingung, unter der sich zeigen läßt, daß das Minimum u_0 von $I(u)$ auch schwache Lösung der Eulergleichung ist. Diese ist z. B. erfüllt, wenn $F(x, \xi)$ in ξ ein exponentielles Wachstum nicht überschreitet (vgl. $(\mathcal{F}_3)$ Seite 25).

Im zweiten Teil der Arbeit betrachten wir Operatoren $A(u) + B^i(u)$ $i = 1, 2, 3$. Dabei ist $A(u)$ ein Operator wie in Teil 1, $B^1(u)$ der oben definierte Operator $B(u)$, $B^2(u)$ ebenfalls ein Operator höchster Ordnung, dessen Wachstum jedoch nicht mehr wie $B^1(u)$ mit der Norm von $W_0^{m,p}(\Omega)$ verknüpft ist, sondern nur "etwas geringer" ist als das Wachstum von $A(u)$. $B^3(u)$ ist ein Störoperator niedrigerer Ordnung, wie ihn F.E. Browder in [3] verwendet.

Die Beweise führen wir nicht wie C.G. Simader in [11] mit einer "Abschneide"-methode sondern mit Hilfe einer Galerkinapproximation. Wir verwenden jedoch nicht die Theorie monotoner Operatoren, sondern zeigen direkt mit bekannten Sätzen der Analysis und der linearen Funktionalanalysis, daß die schwache Grenzfunktion einer Folge von Galerkinlösungen in $W_0^{m,p}(\Omega)$ schwache Lösung des Dirichletproblems ist.

Herrn Professor von Wahl möchte ich für seine fruchtbaren Anregungen und seine dauernde Gesprächsbereitschaft danken, sowie Herrn Professor Jaeger (Heidelberg) für seine hilfreichen Hinweise zum Variationsproblem.

Bezeichnungen:

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sei eine offene beschränkte Menge mit so glattem Rand, daß die Sobolev'schen Einbettungssätze gelten. $\mu(\Omega) := \int_{\Omega} dx$

Für $1 \leq p < \infty$ sei $L^p(\Omega)$ der Banachraum der (Lebesgue-) meßbaren reellen Funktionen mit der Norm $\|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$.

$L^\infty(\Omega)$ sei der Banachraum der fast überall (= f.ü.) beschränkten Funktionen mit der Norm $\|u\|_\infty := \sup_{x \in \Omega \text{ f.ü.}} \{|u(x)|\}$.

Für einen Multiindex $\alpha := \alpha_1, \dots, \alpha_N$ sei $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$. Mit $D^\alpha(u)$

bezeichnen wir die zu α gehörende distributionelle Ableitung, $D^0(u) := u$. $W_0^{m,p}(\Omega)$ sei wie üblich der Banachraum, der durch die Vervollständigung der C_0^∞ Funktionen bezüglich der Norm $\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha(u)|^p dx \right)^{1/p}$ entsteht, $(W_0^{m,p}(\Omega))^*$ der Raum der

stetigen linearen Funktionalen auf $W_0^{m,p}(\Omega)$. $\rightarrow, \rightarrow$ bedeute die schwache bzw. starke Konvergenz in einem Banachraum. Es sei ξ^m ein Vektor in $\mathbb{R}^m$, $\xi^{(0,m-1)}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^{s_{(0,m-1)}}$, so daß jedem Multiindex α mit $|\alpha| = m$ bzw. $|\alpha| \leq m-1$ genau eine Komponente von ξ^m bzw. $\xi^{(0,m-1)}$ zugeordnet ist. $\xi := (\xi^{(0,m-1)}, \xi^m)$, ξ ist also ein Vektor in $\mathbb{R}^s$ mit $s = s_{(0,m-1)} + s_m$, ξ_α bezeichne

die zu α gehörende Komponente von ξ . Wir betrachten im Folgenden Funktionen $A_\alpha(x, \xi): \Omega \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, dabei muß jedoch A_α nicht für jedes α Funktion von allen Komponenten von ξ sein. Den Vektor, der aus den Komponenten besteht, von denen A_α wirklich abhängt, bezeichnen wir mit ξ_{A_α} . s_{A_α} sei die Anzahl der Komponenten des

reellen Vektors ξ_{A_α} . Es ist $|\xi| := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \xi_\alpha^2 \right)^{1/2}$, analog sei

$|\xi^m|, |\xi^{(0,m-1)}|, |\xi_{A_\alpha}|$ und $|\xi_\alpha|$ definiert. Mit $D^m(u)$ be-

zeichnen wir den s_m -Tupel von Ableitungen $D^\alpha(u)$ mit $|\alpha| = m$, bei dem die Multiindizes in der selben Reihenfolge, wie bei ξ^m angeordnet sind. Analog sei $D^{(0,m-1)}(u)$, $D_{A_\alpha}(u)$ erklärt. $D(u) := (D^{(0,m-1)}(u), D^m(u))$. Ist $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, so ist mit

$D(u)(x) := (D^{(0,m-1)}(u)(x), D^m(u)(x))$ für $x \in \Omega$ f.ü. ein reeller Vektor aus $\mathbb{R}^S$ definiert.

Teil 1

Der Operator $A(u)$ mit unbeschränktem Wachstum

§ 1 Der Existenzsatz und einige Beispiele

Wir suchen schwache Lösungen des Problems

$$P: \begin{cases} (A(u)(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, D^{(0,m-1)}(u)(x), D^m(u)(x))) = \\ = f(x) \text{ für } x \in \Omega; \quad D^\alpha(u)|_{\partial\Omega} \equiv 0; \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m-1 \end{cases}$$

zu einer vorgegebenen Funktion f und betrachten dazu einen Operator $\mathcal{A}$, der $D(\mathcal{A}) \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ in den Dualraum $(W_0^{m,p}(\Omega))^*$ abbildet:

Definition 1:

- 1.) Mit $\mathcal{L}$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in L^1(\Omega)$, zu denen $\tilde{f} \in (W_0^{m,p}(\Omega))^*$ existiert, so daß für alle $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt:

$$(\tilde{f}, u) := \tilde{f}(u) = \int_{\Omega} f \cdot u \, dx.$$

- 2.) Eine Funktion $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gehört zum Definitionsbereich von $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $A_\alpha(\cdot, D(u)) \in L^1(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m$ und wenn ein $g \in (W_0^{m,p}(\Omega))^*$ existiert derart, daß für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(x, D(u)(x)) \cdot (D^\alpha(v)(x)) \, dx = (g, v).$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht an $W_0^{m,p}(\Omega)$ liegt, ist g eindeutig bestimmt.

Setzen wir nun $\mathcal{A}(u) = g$ so ist $\mathcal{A}$ wohldefinierter Operator $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow (W_0^{m,p}(\Omega))^*$.

- 3.) Wir nennen u eine schwache Lösung des Dirichletproblems

$$A(u) = f \text{ mit } f \in \mathcal{L}, \text{ wenn } u \in D(\mathcal{A}) \text{ und } \mathcal{A}(u) = \tilde{f}$$

Für den Differentialoperator $A(u)$ vereinbaren wir die folgenden Voraussetzungen:

(A₁) i) Die Abbildungen $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ genügen der Caratheo-
bedingung d. h.:

$A_\alpha(., \xi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist meßbar für alle $\xi \in \mathbb{R}^S$.

$A_\alpha(x, .) : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig f.ü. in Ω ,

ii) Für jedes $c > 0$ gibt es ein $\check{K}(c) > 0$, so daß für alle α mit
 $|\alpha| \leq m$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leq \check{K}(c) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^S \text{ mit } |\xi_{A_\alpha}| \leq c.$$

iii) Für $|\alpha| \leq m$ gibt es $K_\alpha > 0$, so daß f. ü. für alle $\xi \in \mathbb{R}^S$

$$A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \geq -K_\alpha.$$

(A₂) Es gibt für $x \in \Omega$ f.ü. eine stetig differenzierbare
strikt konvexe Funktion $F(x, .) : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß

i) F genügt der Caratheodorybedingung und $F(., 0) \in L^1(\Omega)$,

ii) $\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} F(x, \xi) = A_\alpha(x, \xi)$ f.ü. in Ω .

(A₃) Es gibt $R_0 < \infty$ und Funktionen $\gamma_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_\alpha(r) = 0$,
so daß f.ü.:

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leq \gamma_\alpha(|\xi_{A_\alpha}|) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha + K_\alpha) \right) \quad \text{für alle}$$

$$\xi \in \mathbb{R}^S \text{ mit } |\xi_{A_\alpha}| \geq R_0 \text{ und } |\alpha| \leq m.$$

(A₄) Es gibt $p > 1$, so daß für $u \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega A_\alpha(., D(u)) D^\alpha(u) dx \right) \cdot (\|u\|_{m,p})^{-1} \rightarrow \infty, \text{ wenn}$$

$$\|u\|_{m,p} \rightarrow \infty.$$

Bemerkungen:

1.) In [3] benutzt F.E. Browder eine ähnliche Bedingung wie (A₃).
Er ersetzt jedoch darin $\gamma_\alpha(|\xi_{A_\alpha}|)$ durch $\gamma_\alpha(|\xi|)$. Dies be-
deutet eine Einschränkung und im konkreten Fall eine wesentlich

schwieriger zu verifizierende Voraussetzung, ohne daß dadurch für den Beweis etwas gewonnen würde. Ist z. B. $A_\alpha(x, \xi) := g_\alpha(\xi_\alpha)$ und $g_\alpha(\xi_\alpha) \cdot \xi_\alpha \geq 0$, so sieht man sofort

$$|g_\alpha(\xi_\alpha)| \leq \frac{1}{|\xi_\alpha|} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha(\xi_\alpha) \cdot \xi_\alpha \right)$$

($\mathcal{A}_3$) ist also erfüllt. Gibt es dabei ein $\tilde{\alpha}$, so daß $g_{\tilde{\alpha}}(\xi_{\tilde{\alpha}}) \cdot \xi_{\tilde{\alpha}} \leq 0$ für alle $\xi_{\tilde{\alpha}} \in \mathbb{R}$ so würde aus der Browderschen Bedingung für alle $\alpha \neq \tilde{\alpha}$ folgen $g_\alpha \equiv 0$. Gilt jedoch g_α monoton wachsend und $|g_\alpha(\xi_\alpha)| \rightarrow \infty$ mit $|\xi_\alpha| \rightarrow \infty$ für alle α , so kann gezeigt werden, daß auch die Browdersche Bedingung erfüllt ist (vgl.: Lemma 6, Seite 21).

2.) Aus ($\mathcal{A}_2$) folgt wegen F strikt konvex (vgl. [10] Seite 21):

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi)(\xi_\alpha - \xi'_\alpha) &\geq F(x, \xi) - F(x, \xi'), \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi')(\xi'_\alpha - \xi_\alpha) \geq \\ &\geq F(x, \xi') - F(x, \xi) \end{aligned}$$

und damit $\sum_{|\alpha| \leq m} (A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi'))(\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geq 0$,

wobei das Gleichheitszeichen in allen 3 Abschätzungen nur gilt, wenn $\xi = \xi'$. ($\mathcal{A}_2$) impliziert also eine strikte Monotoniebedingung.

3.) Wir benötigen die Koerzitivitätsbedingung nur, um eine A-priori Schranke für eine Folge von Galerkinlösungen zu erhalten. Es gibt noch weitere Bedingungen, die eine solche A-priori-Schranke liefern (vgl. z. B. [2], [3]). Die Koerzitivitätsbedingung scheint jedoch dem Problem P am ehesten angemessen zu sein.

Satz 1:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, für das die Sobolev'schen Einbettungssätze gelten. Sei $f \in \mathcal{L}$ und $A(u) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, D(u)))$,

so daß für $A(u)$ die Voraussetzungen ($\mathcal{A}_1$) bis ($\mathcal{A}_4$) gelten.

Dann gibt es ein $u_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$, so daß u_0 schwache Lösung des Dirichletproblems $A(u) = f$ ist.

Wir geben nun einige Beispiele an, auf die der Satz anwendbar ist. Daß dabei jeweils die Bedingung $(\mathcal{A}_3)$ erfüllt ist, zeigen wir in Lemma 6 in einem allgemeineren Zusammenhang.

1.) Seien $\phi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, |\alpha| \leq m$ stetige streng monoton wachsende Funktionen für die $c_0 > 0, R_\theta > 0$ und $p > 1$ existieren, so daß für $r \geq R_\theta$ gilt: $\phi_\alpha(r) \cdot r \geq 0, |\phi_\alpha(r)| \geq c_0 |r|^{p-1}$, dann genügt
 $A(u) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi_\alpha(D^\alpha(u))$ den Bedingungen von Satz 1:

Beweis:

Setzen wir $\phi_\alpha(\xi_\alpha) := \int_0^\xi \phi_\alpha(r) dr$, $F(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} \phi_\alpha(\xi_\alpha)$ und

$R_\alpha := \max \{|\phi_\alpha(r)| : -R_\theta \leq r \leq R_\theta\}$, so ist $(\mathcal{A}_1)$ trivialerweise

erfüllt; $F(\xi)$ ist aus $C^1(\mathbb{R}^S)$ und strikt konvex, $F(0) \equiv 0$;

also ist $(\mathcal{A}_2)$ erfüllt und $(\mathcal{A}_4)$ gilt wegen: $\phi_\alpha(r) \cdot r \geq c_0 |r|^p - (|R_\alpha| + R_\theta^p) \cdot R_\alpha$.

2.) Sei ϕ_α wie in 1) definiert. Mit $R_1 := 1 + \sum_{|\alpha| \leq m} 2 \cdot R_\theta \cdot R_\alpha$,

gilt: $\sum_{|\alpha| \leq m} \phi_\alpha(\xi_\alpha) > -R_1$. Sei nun ψ eine streng monoton

wachsende stetige Funktion $\psi: (-R_1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, mit $\psi(r) \geq \epsilon_0 > 0$

für $r \in (-R_1, \infty)$, so gilt Satz 1 für

$$A(u) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\psi \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \phi_\alpha(D^\alpha(u)) \right) \cdot \phi_\alpha(D^\alpha(u)) \right)$$

Beweis: Sei $\Psi(r) := \int_0^r \psi(\rho) d\rho$ und $F(\xi) := \Psi \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \right)$, so gilt

wegen $\psi(r) \geq \epsilon_0$ $(\mathcal{A}_1)$ und $(\mathcal{A}_4)$ analog zu Beispiel 1.

Da $F(0) \equiv 0$, $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$ bleibt, um $(\mathcal{A}_2)$ zu zeigen, der Nachweis von F strikt konvex. Sei $\xi \neq \xi'$, $0 < \beta < 1$, so ist:

$$F(\beta\xi + (1-\beta)\xi') = \Psi \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \phi_\alpha(\beta\xi_\alpha + (1-\beta)\xi'_\alpha) \right)$$

$$< \Psi \left(\beta \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \phi_\alpha(\xi_\alpha) \right) + (1-\beta) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \phi_\alpha(\xi'_\alpha) \right) \right)$$

$$\leq \beta F(\xi) + (1-\beta)F(\xi')$$

(Da $\psi(r) > 0$ und streng monoton wachsend, ist Ψ strikt konvex und streng monoton wachsend).

3.) Setzen wir $\phi_\alpha(\xi_\alpha) := p_\alpha \cdot |\xi_\alpha|^{p_\alpha-2} \cdot \xi_\alpha$; mit $p_\alpha > 1$, und $\psi: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\psi(r) := e^r$ so gilt Satz 1 für

$$A(u) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} p_\alpha \cdot D^\alpha \left(\exp \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha(u)|^{p_\alpha} \right) \cdot (|D^\alpha(u)|^{p_\alpha-2} \cdot D^\alpha(u)) \right).$$

Bemerkungen:

1.) In [11] betrachtet C.G. Simader einen ähnlichen Operator wie Beispiel 1. Für $|\alpha| = m$ wird dort noch vorausgesetzt, daß $g_\alpha(r) \cdot r$ eine konvexe Funktion ist. Auf die Voraussetzung $|g_\alpha(r)| > |r|^{p-1}$ für $r > R_0$ kann in [11] deshalb verzichtet werden, weil noch ein Operator $B(u)$ addiert wird, der bereits koerziv ist.

2.) Um Beispiel 1 mit den Methoden von Gossez (vgl. [5]) behandeln zu können, müßte noch gelten: 1. ϕ_α ist eine ungerade Funktion.
 2. Das Wachstumsverhalten für große r ist für alle $\phi_\alpha(r)$ das selbe.

Um Satz 1 zu beweisen, zeigen wir, daß für eine Folge von Galerkinlösungen $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ eine schwache Grenzfunktion $u_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$ existiert, so daß $A_\alpha(\cdot, D(u_k)) \rightarrow A_\alpha(\cdot, D(u_0))$ in $L^1(\Omega)$. Wir können dann leicht schließen $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}(u) = \mathcal{F}$. In § 2 zeigen wir zunächst die punktweise Konvergenz von $D^\alpha(u_k)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x)$ f.ü..

§ 2 Punktweise Konvergenz einer Folge von Galerkinlösungen

Lemma 1 sichert uns die Existenz von Galerkinlösungen. Dazu benötigen wir die folgende

Definition 2.

Sei $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ eine abzählbare Folge von $C_0^\infty(\Omega)$ Funktionen, so daß zu $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Folge $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty \subset \{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ existiert, mit der Eigenschaft $\phi_i \rightarrow \phi$ in der C^m -Norm für $i \rightarrow \infty$. Die Folge $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ liegt dann dicht in $W_0^{m,p}(\Omega)$ (eine solche Folge existiert, da $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{\mu,2}(\Omega)$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$ und $W_0^{\mu,2}(\Omega)$ separabel).

V_n sei der von $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ aufgespannte Teilraum. Für $u, v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ setzen wir noch

$$(A(u), v) := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha}(\cdot, D(u)) \cdot D^{\alpha}(v) \, dx,$$

wenn die Integrale auf der rechten Seite existieren und

$$(A_n(u), v) := (A(u), v) \quad \text{für } u, v \in V_n.$$

Lemma 1

i) Zu $f \in \mathcal{L}$ existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Galerkinlösung d. h. es gibt ein $u_n \in V_n$, so daß

$$(1) \quad (A_n(u_n), v) = (f, v), \quad \text{für alle } v \in V_n$$

ii) Weiter gibt es eine von n unabhängige Konstante K_0 , so daß

$$(2) \quad \|u_n\|_{m,p} \leq K_0.$$

Beweis:

Ist $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, so ist $A_{\alpha}(\cdot, D^{\alpha}(u)(\cdot)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wegen der Caratheodorybedingung meßbar (vgl. [8] Seite 665 ff) und wegen (A_1, ii) fast überall beschränkt. Somit ist $(A_n(u), v)$ für alle $u, v \in V_n$ erklärt und $(A_n(u), \cdot)$ ist ein stetiges lineares Funktional auf V_n , wenn auf V_n die übliche Norm $\|\cdot\|_{V_n}$ eines reellen Vektorraums endlicher Dimension erklärt ist. Denn die C^m Norm ist auf V_n ebenfalls eine Norm, bezüglich dieser ist $(A_n(u), \cdot)$ sicher stetig und auf V_n sind wegen $\dim(V_n) < \infty$ zwei Normen äquivalent. Wegen dieser Äquivalenz gilt auch die folgende Abschätzung:

$$\frac{(A_n(u), u)}{\|u\|_{V_n}} \geq C(n) \frac{(A(u), u)}{\|u\|_{m,p}} \quad \text{mit einer von } u \text{ unabhängigen Kon-}$$

stanten $C(n)$. Da mit $\|u\|_{m,p} \rightarrow \infty$ auch gilt $\|u\|_{V_n} \rightarrow \infty$, ist $\mathcal{A}_n : V_n \rightarrow V_n^*$, $\mathcal{A}_n(u) := (A_n(u), \cdot)$ eine koerzive Abbildung.

Da wir wissen, daß eine stetige, koerzive Abbildung von $V_n \rightarrow V_n^*$ surjektiv ist (vgl. z. B. [1] Lemma 3) und $f|_{V_n} \in V_n^*$, gibt es ein $u_n \in V_n$, so daß

$$(1) \quad (A_n(u_n), v) = (f, v) \quad \text{für alle } v \in V_n,$$

wenn wir gezeigt haben, daß $\mathcal{A}_n$ stetig ist.

Sei also $u_j \rightarrow u$ in V_n , so ist auch $u_j \rightarrow u$ in $C^m(\bar{\Omega})$. Wegen $(\mathcal{A}_1 i)$, ii) gilt dann $A_\alpha(x, D(u_j)(x)) \rightarrow A_\alpha(x, D(u)(x))$ f.ü. und $|A_\alpha(x, D(u_j)(x))| \leq C$ f.ü.. Mit dem Satz von Lebesgue folgt, daß $A_\alpha(\cdot, D(u_j)) \rightarrow A_\alpha(\cdot, D(u))$ in $L^1(\Omega)$ konvergiert für $|\alpha| \leq m$. Für $v \in V_n$ gilt somit $(A_n(u_j), v) \rightarrow (A_n(u), v)$, $j \rightarrow \infty$. Da die Dimension von V_n^* endlich ist, haben wir die Stetigkeit von $\mathcal{A}_n$ gezeigt.

ii) Setzen wir in (1) $v = u_n$, so erhalten wir:

$$(A_n(u_n), u_n) = (f, u_n) \leq \|f\|_{(W_0^{m,p}(\Omega))^*} \|u_n\|_{m,p} \quad \text{und damit}$$

$$(A_n(u_n), u_n) (\|u_n\|_{m,p})^{-1} \leq \|f\|_{(W_0^{m,p}(\Omega))^*}$$

Aus der Koerzitivitätsbedingung folgt daraus, die Existenz einer von n unabhängigen Konstanten K_0 , so daß

$$(2) \quad \|u_n\|_{m,p} \leq K_0.$$

Lemma 1 ist damit vollständig bewiesen.

Aus dieser Folge von Galerkinlösungen $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ können wir wegen der Reflexivität von $W_0^{m,p}(\Omega)$, bzw. der von $L^p(\Omega)$, sowie der kompakten Einbettung von $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m-1,p}(\Omega)$, eine

Teilfolge von $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ auswählen, die wir wieder mit $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ bezeichnen, so daß gilt:

Es gibt $u_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$ mit $u_n \rightharpoonup u_0$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$; $D^\alpha(u_n) \rightarrow D^\alpha(u_0)$ in $L^p(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m-1$ und $D^\alpha(u_n) \rightarrow D^\alpha(u_0)$ in $L^p(\Omega)$ für $|\alpha| = m$.

Wir betrachten nun die Folge $\{F(x, D(u_n)(x))\}_{n=1}^\infty$. Für sie zeigen wir

Lemma 2

$F(\cdot, D(u_n))$ ist aus $L^1(\Omega)$ und es gibt eine von n unabhängige Konstante $K_1 > 0$, so daß

$$(3) \quad -K_1 \leq \int_{\Omega} F(., D(u_n)) \, dx \leq K_1$$

Beweis:

1.) Wegen $(\mathcal{A}_1)$ ist $\sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(., D(u_n)) \cdot D^{\alpha}(u_n)$ und $\sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(., o) \cdot D^{\alpha}(u_n)$ aus $L^1(\Omega)$. Weiter ist $A_{\alpha}(., o) \in L^{\infty}(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m$, so daß mit Lemma 1 die folgenden Abschätzungen gelten:

$$|(A(u_n), u_n)| = |(f, u_n)| \leq \|f\|_{(W_0^{m,p}(\Omega))'} \cdot K_0 \leq C$$

und mit $p' = \frac{p}{p-1}$

$$|(A(o), u_o)| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|A_{\alpha}(., o)\|_{L^{\infty}(\mu(\Omega))}^{1/p'} \cdot \|D^{\alpha}(u_n)\|_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

2.) Da $F(x, .) : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ aus $C^1(\mathbb{R}^S)$ und konvex gilt f.ü. in Ω :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, D(u_n)(x)) (D^{\alpha}(u_n)(x) - o) \geq F(x, D(u_n)(x)) - F(x, o) \quad \text{und} \\ \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, o) (o - D^{\alpha}(u_n)(x)) \geq F(x, o) - F(x, D(u_n)(x)),$$

zusammen ergibt dies:

$$(4) \quad F(x, o) - \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, o) \cdot D^{\alpha}(u_n)(x) \leq \\ \leq F(x, D(u_n)(x)) \leq \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, D(u_n)(x)) \cdot (D^{\alpha}(u_n)(x)) + F(x, o)$$

Wegen der Caratheodorybedingung ist $F(., D(u_n))$ meßbar und wegen der punktweisen Abschätzung durch $L^1(\Omega)$ Funktionen in (4) aus $L^1(\Omega)$.

Setzen wir $K_1 := \sup_n \{ |(A(o), u_n)|, |(A(u_n), u_n)| \} + \int_{\Omega} F(., o) \, dx$,

so folgt die Behauptung von Lemma 2.

Wenn wir nun $\Phi(u) := \int_{\Omega} F(., D(u)) \, dx$ setzen, so gibt es $K_2 \in \mathbb{R}$

mit $-K_1 \leq K_2 \leq K_1$, so daß für eine Teilfolge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, die wir wieder mit $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ bezeichnen, gilt: $\Phi(u_n) \rightarrow K_2$ für $n \rightarrow \infty$.

Um mit Hilfe der Voraussetzung $(\mathcal{A}_2)$ und mit (1) weitere Eigenschaften von $\Phi(u_n)$ zeigen zu können, konstruieren wir eine Folge

$\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\tilde{u}_k \in V_{n(k)}$ und $\tilde{u}_k \rightarrow u_o$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$. Dazu benötigen

wir den folgenden Satz (vgl. [13], Seite 120):

Ist X ein Banachraum und $v_k \rightarrow v$ in X so gibt es Zahlen

$a_j^k \geq 0$, so daß $\sum_{j=1}^k a_j^k = 1$, und für $\tilde{v}_k := \sum_{j=1}^k a_j^k v_j$ gilt $\tilde{v}_k \rightarrow v$ in X .

Es sei nun $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$ eine monoton fallende Nullfolge.

Zu ϵ_k wählen wir $v_0(k) \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $n \geq v_0(k)$ gilt:

$$|K_2 - \phi(u_n)| \leq \frac{\epsilon_k}{4}.$$

Weiter bestimmen wir $v_1(k) \in \mathbb{N}$ und Zahlen $\omega_n^k \geq 0$ so, daß mit

$$\sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{u}_k := \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k u_n \quad \text{gilt:} \quad \|\tilde{u}_k - u_0\|_{m,p} \leq \epsilon_k.$$

Wir können dabei annehmen $v_1(k+1) > v_1(k)$.

Setzen wir $n_0(k) := v_1(k)$ und $u_k := u_n$ für $n = n_0(k)$, so erhalten

wir zu $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$ die Folgen $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ und $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^\infty$. Durch gleichzei-

tiges auswählen aus allen 3 Folgen erhalten wir Teilfolgen, die wir

wieder mit $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty, \{u_k\}_{k=1}^\infty$ und $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^\infty$ bezeichnen, mit den folgenden

Eigenschaften:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_k \text{ ist Galerkinlösung in } V_{n_0(k)}, \tilde{u}_k \in V_{n_0(k)}, u_k \rightarrow u_0 \text{ in } W_0^{m,p}(\Omega) \\ \tilde{u}_k \rightarrow u_0 \text{ in } W_0^{m,p}(\Omega) \text{ und } D^\alpha(\tilde{u}_k)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x) \text{ f.ü. für } |\alpha| \leq m, \\ |\phi(u_n) - K_2| \leq \frac{\epsilon_k}{4}, \text{ für alle } n \geq v_0(k) \text{ und somit auch} \\ |\phi(u_k) - K_2| \leq \frac{\epsilon_k}{4}. \text{ Schließlich ist } \{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty \text{ monoton fallende} \\ \text{Nullfolge.} \end{array} \right.$$

Lemma 3

Es ist $F(\cdot, D(\tilde{u}_k)) \in L^1(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$(6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(\tilde{u}_k) = K_2.$$

Beweis:

- 1.) Wie in Lemma 2 gilt: $|A(o), \hat{u}_k| \leq C$ und mit der Jensenschen Ungleichung (vgl. [7] Seite 202) ist:

$$\begin{aligned} F(x, o) &= \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, o) \cdot (D^\alpha(\hat{u}_k))(x) \leq F(x, D(\hat{u}_k)(x)) \\ &\leq \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k F(x, D(u_n)(x)). \end{aligned}$$

Da nun $n \geq v_0(k)$ ist, haben wir $\int_{\Omega} \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k F(x, D(u_n)(x)) dx$

$$= \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \cdot \phi(u_n) \leq K_2 + \frac{\varepsilon_k}{4}, \text{ so da\ss analog zu Lemma 2 folgt}$$

$$F(., D(\hat{u}_k)) \in L^1(\Omega).$$

- 2.) Setzen wir $(u_k - \hat{u}_k) \in V_{n_0(k)}$ in (1) ein, so erhalten wir wieder mit der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned} (\hat{f}, u_k - \hat{u}_k) &= \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(., D(u_k)) \cdot (D^\alpha(u_k) - D^\alpha(\hat{u}_k)) dx \\ &\geq \int_{\Omega} F(., D(u_k)) dx - \int_{\Omega} F(., D(\hat{u}_k)) dx = \phi(u_k) - \phi(\hat{u}_k) \\ &\geq \phi(u_k) - \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \int_{\Omega} F(., D(u_n)) dx \\ &= \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k (\phi(u_k) - \phi(u_n)) \geq - \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \cdot \frac{\varepsilon_k}{2} \\ &= - \frac{\varepsilon_k}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $u_k \rightarrow u_0$, $\hat{u}_k \rightarrow u_0$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt $(\hat{f}, u_k - \hat{u}_k) \rightarrow 0$.

Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Lemma 4

Für eine weitere Teilfolge von $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, die wir wieder mit $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ bezeichnen, gilt für $k \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{2} F(x, D(u_k)(x)) + \frac{1}{2} F(x, D(\tilde{u}_k)(x)) - F(x, D\left(\frac{\tilde{u}_k + u_k}{2}\right)(x)) \right| \rightarrow 0, \text{ f.ü.}$$

Beweis:

Zunächst ist wegen der Konvexität von $F(x, \cdot)$ f.ü.

$$\frac{1}{2} F(x, D(u_k)(x)) + \frac{1}{2} F(x, D(\tilde{u}_k)(x)) - F(x, D\left(\frac{\tilde{u}_k + u_k}{2}\right)(x)) \geq 0 \text{ f.ü.}$$

Analog zu Lemma 3 1.) zeigt man $F(\cdot, D(\frac{1}{2}(u_k + \tilde{u}_k))) \in L^1(\Omega)$.

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $\nu(\varepsilon)$, so daß für alle $k \geq \nu(\varepsilon)$

$$\text{gilt: } (f, \frac{1}{2}(u_k - \tilde{u}_k)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ und wegen (6): } |\phi(u_k) - \phi(\tilde{u}_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Darum ist mit (1)

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq (A(u_k), \frac{u_k - \tilde{u}_k}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} = (A(u_k), u_k - \frac{u_k + \tilde{u}_k}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \phi(u_k) - \phi\left(\frac{u_k + \tilde{u}_k}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \frac{1}{2} \phi(u_k) + \frac{1}{2} \phi(\tilde{u}_k) - \phi\left(\frac{u_k + \tilde{u}_k}{2}\right) \\ &= \int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} F(x, D(u_k)(x)) + \frac{1}{2} F(x, D(\tilde{u}_k)(x)) - F(x, D\left(\frac{u_k + \tilde{u}_k}{2}\right)(x)) \right| dx \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen der starken Konvergenz in $L^1(\Omega)$, können wir nun zu einer Teilfolge übergehen, welche die Behauptung des Lemmas erfüllt.

Das folgende Lemma sichert uns nun die punktweise Konvergenz von

$$D^{\alpha}(u_k)(x) \rightarrow D^{\alpha}(u_0)(x) \text{ f.ü.}$$

Lemma 5

Sei $\phi: \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und strikt konvex und ist:

$$\frac{1}{2} \phi(\zeta_k) + \frac{1}{2} \phi(\tilde{\zeta}_k) - \phi\left(\frac{\zeta_k + \tilde{\zeta}_k}{2}\right) \rightarrow 0, \text{ für } k \rightarrow \infty$$

so konvergiert $|\zeta_k - \tilde{\zeta}_k| \rightarrow 0$, wenn nur eine der beiden Folgen

$\{\tau_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^S$ oder $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^S$ konvergiert.

Beweis:

Wir gliedern den Beweis in 3 Hilfssätze:

Hilfssatz 1: Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und strikt konvex. Es gelte für $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{2} h(a) + \frac{1}{2} h(b) - h\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon > 0.$$

Ist dann $\tilde{b} = a + \sigma(b-a)$ mit $\sigma \geq 1$ so gilt:

$$\frac{1}{2} h(a) + \frac{1}{2} h(\tilde{b}) - h\left(\frac{a+\tilde{b}}{2}\right) - \varepsilon > 0.$$

Bew.: $\sigma = 1$ ist klar. Sei $\sigma > 1$. Wir wissen jede Gerade in $\mathbb{R}^2$ und der Graph von h haben höchstens zwei Punkte gemeinsam. Wir betrachten zuerst die Gerade g_1 , die durch die Punkte $(a, h(a)-2\varepsilon)$ und $(b, h(b))$ läuft.

Für sie gilt:

$$\frac{1}{2} (h(a) - 2\varepsilon) + \frac{1}{2} h(b) = g_1\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Nach den Voraussetzungen des Hilfssatzes ist somit $h\left(\frac{a+b}{2}\right) < g_1\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Wir wissen aber auch $g_1(a) < h(a)$, so daß ein $\beta \in (a, \frac{a+b}{2})$

existieren muß mit $h(\beta) = g_1(\beta)$. Weiter ist

$$(7) \quad g_1(r) > h(r) \text{ für } r \in (\beta, b); \quad g_1(r) < h(r) \text{ für } r \in [a, \beta]$$

Betrachten wir nun die Gerade g_2 , die durch die Punkte $(a, h(a)-2\varepsilon)$ und $(\tilde{b}, h(\tilde{b}))$ läuft, so ist $\tilde{b} \in [\beta, b]$, also $g_2(\tilde{b}) = h(\tilde{b}) > g_1(\tilde{b})$.

g_2 und g_1 haben deshalb genau einen Punkt gemeinsam, den wir mit $(a, h(a)-2\varepsilon)$ aber kennen. Mit $g_2(\tilde{b}) > g_1(\tilde{b})$ folgt:

$g_2(a+\tau(a-\tilde{b})) > g_1(a+\tau(a-\tilde{b}))$ für alle $\tau > 0$, also insbesondere

$g_2(\beta) > g_1(\beta) = h(\beta)$. Da aber $g_2(a) < h(a)$, gibt es $\tilde{\beta} \in (a, \beta)$,

so daß $g_2(\tilde{\beta}) = h(\tilde{\beta})$. Es ist $g_2(\beta) > h(\beta)$ mit $\beta \in (\tilde{\beta}, \tilde{b})$, also

muß für alle $r \in (\tilde{\beta}, \tilde{b})$ gelten $g_2(r) > h(r)$.

Wegen $\frac{a+\tilde{b}}{2} \in (\frac{a+b}{2}, \tilde{b}) \subset (\tilde{\beta}, \tilde{b})$ wissen wir:

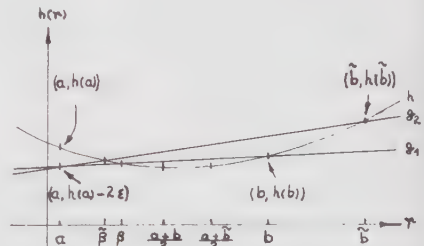


Fig.: 1

$h(\frac{a+b}{2}) < g_2(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}(h(a)-2\epsilon) + \frac{1}{2}h(b)$, woraus die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

Hilfssatz 2: Sei $\phi : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und strikt konvex. Sei

$\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty \subset K(\zeta, R)$, dann gibt es zu $R > 0$ ein $\epsilon(R) > 0$, so daß für jedes $\rho \in S(\zeta, 2R)$ und $k = 1, 2, \dots$ gilt: $\frac{1}{2}\phi(\zeta_k) + \frac{1}{2}\phi(\rho) - \phi(\frac{\zeta_k + \rho}{2}) > \epsilon(R)$.

Dabei ist $S(\zeta, 2R)$ bzw. $K(\zeta, R)$ die Sphäre bzw. Kugel in $\mathbb{R}^S$ mit Mittelpunkt ζ und Radius $2R$, bzw. R .

Bew.: Wir nehmen an die Behauptung des Hilfssatzes sei falsch.

Dann finden wir zu einer positiven Nullfolge $\{\epsilon_j\}_{j=1}^\infty$ Folgen $\{\rho_j\}_{j=1}^\infty$ und

$\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty$ mit $\{\rho_j\}_{j=1}^\infty \subset S(\zeta, 2R)$ und $\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty \subset \{\zeta_k \mid k = 1, 2, \dots\}$

derart, daß $\frac{1}{2}\phi(\zeta_j) + \frac{1}{2}\phi(\rho_j) - \phi(\frac{\zeta_j + \rho_j}{2}) \leq \epsilon_j$, und $\zeta_j \rightarrow \zeta_0 \in K(\zeta, R)$,

$\rho_j \rightarrow \rho_0 \in S(\zeta, 2R)$ für $j \rightarrow \infty$. Da ϕ stetig ist folgt:

$\frac{1}{2}\phi(\zeta_0) + \frac{1}{2}\phi(\rho_0) - \phi(\frac{\zeta_0 + \rho_0}{2}) = 0$, was der Voraussetzung ϕ strikt

konvex widerspricht, da $\zeta_0 \neq \rho_0$.

Hilfssatz 3: Mit $\epsilon(R) > 0$ und den übrigen Voraussetzungen von

Hilfssatz 2 gilt: Ist $\zeta_k \in K(\zeta, R)$, so folgt aus

$$\frac{1}{2}\phi(\zeta_k) + \frac{1}{2}\phi(\tilde{\zeta}_k) - \phi(\frac{\zeta_k + \tilde{\zeta}_k}{2}) \leq \epsilon(R), \text{ daß } \tilde{\zeta}_k \in K(\zeta, 2R).$$

Bew.: Wir nehmen an, daß $\tilde{\zeta}_k \notin K(\zeta, 2R)$. Dann gibt es $\rho_k \in S(\zeta, 2R)$,

so daß $\zeta_k + \sigma_k(\rho_k - \zeta_k) = \tilde{\zeta}_k$ mit $\sigma_k \geq 1$. Setzen wir nun $h_k(\tau) =$

$= \phi(\zeta_k + \tau(\rho_k - \zeta_k))$ so ist $h_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und strikt konvex,

deshalb ist mit Hilfssatz 2:

$$0 < -\epsilon(R) + \frac{1}{2}\phi(\zeta_k) + \frac{1}{2}\phi(\rho_k) - \phi(\frac{\zeta_k + \rho_k}{2}) = \frac{1}{2}h_k(0) + \frac{1}{2}h_k(1) - h_k(\frac{1}{2}) - \epsilon(R),$$

so daß mit Hilfssatz 1 folgt:

$$0 < -\epsilon(R) + \frac{1}{2}h_k(0) + \frac{1}{2}h_k(\sigma_k) - h_k(\frac{\sigma_k}{2}) = \frac{1}{2}\phi(\zeta_k) + \frac{1}{2}\phi(\tilde{\zeta}_k) - \phi(\frac{\zeta_k + \tilde{\zeta}_k}{2}) - \epsilon(R).$$

Da dies der Voraussetzung widerspricht, ist Hilfssatz 3 bewiesen.

^{*)} $\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty$ ist im allgemeinen keine Teilfolge von $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$

Aus Hilfssatz 2 und 3 folgt aber nun sofort, gilt $\xi_k \rightarrow \xi_0$ und $\frac{1}{2} \phi(\xi_k) + \frac{1}{2} \phi(\xi_k^*) - \phi(\frac{\xi_k + \xi_k^*}{2}) \rightarrow 0$, so konvergiert auch $\xi_k^* \rightarrow \xi_0$, wenn ϕ eine stetige strikt konvexe Funktion $\mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Lemma 5 ist also gezeigt.

Der Beweis der punktweisen Konvergenz $D^\alpha(u_k)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x)$ f.ü. für alle α mit $|\alpha| \leq m$ ist damit abgeschlossen.

§ 3 Beweis von Satz 1, Korollar 1.

1.) Mit (A_1) folgt aus $D^\alpha(u_k)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x)$ auch $A_\alpha(x, D(u_k(x))) \rightarrow A_\alpha(x, D(u_0)(x))$; um damit auch die $L^1(\Omega)$ -Konvergenz zu beweisen, benutzen wir den Satz von Vitali (vgl.: [7], Seite 203). Es ist also zu zeigen: zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jede meßbare Menge $\Omega' \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega') < \delta$ und jedes k gilt:

$$\int_{\Omega'} |A_\alpha(\cdot, D(u_k))| dx < \varepsilon.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\rho(\varepsilon) > R_0$ so groß, daß für $|x| \geq \rho(\varepsilon)$ wegen (A_3) folgt:

$$\gamma_\alpha(|x|) \leq \varepsilon \cdot (2 \sup_k \{A(u_k), u_k\} + K_3 \cdot \mu(\Omega))^{-1} \text{ mit } K_3 := \sum_{|\alpha| \leq m} K_\alpha$$

Dies ist möglich, da $A(u_k), u_k \leq C$ für alle k . (vgl.: Beweis von Lemma 2).

Ist $|x| \leq \rho(\varepsilon)$, so wissen wir mit (A_1) $|A_\alpha(x, \xi)| \leq \tilde{\alpha}(\rho(\varepsilon))$ und

definieren $\delta := \varepsilon(2 \cdot \tilde{\alpha}(\rho(\varepsilon)))^{-1}$. Es ist dann mit $\tilde{\alpha}(\varepsilon, k, \alpha) :=$

$$= \{x \in \Omega \mid |D_\alpha(u_k)(x)| \leq \rho(\varepsilon)\} :$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |A_\alpha(x, D(u_k)(x))| dx &\leq \int_{\Omega' \cap \Omega(\varepsilon, k, \alpha)} \tilde{\alpha}(\rho(\varepsilon)) dx + \\ &+ \int_{\Omega' \setminus \Omega(\varepsilon, k, \alpha)} \gamma_\alpha(\rho(\varepsilon)) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (A_\alpha(\cdot, D(u_k)) \cdot D^\alpha(u_k) + K_\alpha) \right) dx \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k = 1, 2, \dots$$

Mit dem Satz von Vitali folgt nun $A_\alpha(., D(u_0)) \in L^1(\Omega)$ und

$$(8) \quad A_\alpha(., D(u_k)) \rightarrow A_\alpha(., D(u_0)) \text{ in } L^1(\Omega).$$

2.) Um zu beweisen, daß $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ bemerken wir zunächst, daß es für $v \in \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ ein k_0 so gibt, daß $v \in V_{n_0}(k_0)$ und für alle $k > k_0$ wegen (1) und (5) gilt:

$$(A(u_k), v) = (\mathcal{F}, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(., D(u_k)) \cdot D^\alpha(v) \, dx.$$

Da für $v \in \bigcup_{n=1}^\infty V_n$, $D^\alpha(v) \in L^\infty(\Omega)$ erhalten wir hieraus mit (8):

$$(9) \quad \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(., D(u_0)) \cdot D^\alpha(v) \, dx = (\mathcal{F}, v).$$

Sei nun $v \in C_0^\infty(\Omega)$ so gibt es nach Wahl von $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ eine Folge $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ mit $v_n \in V_n$, so daß v_n gegen v in der C^m -Norm konvergiert. Es muß deshalb wegen (9) gelten:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(., D(u_0)) \cdot D^\alpha(v) \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(., D(u_0)) \cdot D^\alpha(v_n) \, dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{F}, v_n) = (\mathcal{F}, v), \end{aligned}$$

woraus $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}(u_0) = \mathcal{F}$ folgt. Satz 1 ist somit bewiesen.

Wir zeigen noch, daß für einen monotonen Operator $A(u)$ die Bedingung $(\mathcal{A}_3)$ erfüllt ist, wenn er ein gewisses Wachstum besitzt, das meist durch die Koerzivitätseigenschaft gegeben sein wird:

$(\mathcal{A}_5)$ Es gibt $R_2 > 1$, $K_3 > 0$ und eine monoton wachsende Funktion $\Pi : (R_2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\Pi(r) \rightarrow \infty$, wenn $r \rightarrow \infty$, so daß f. ü. für alle $\xi \in \mathbb{R}^S$ mit $|\xi| \geq R_2$ gilt:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \geq \Pi(|\xi|) \cdot |\xi| - K_3.$$

Mit dieser Voraussetzung gilt:

Lemma 6

$A_\alpha(.,.): \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle für $|\alpha| \leq m$ ($\mathcal{A}_1$), ($\mathcal{A}_5$) weiter sei

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')) (\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geq 0. \quad \text{f. ü. für alle } \xi, \xi' \in \mathbb{R}^S$$

Dann gibt es Funktionen $\gamma_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_\alpha(r) = 0$ und $R_3 > 0$,

so daß f. ü. für alle $\xi \in \mathbb{R}^S$ mit $|\xi_{A_\alpha}| \geq R_3$ gilt:

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leq \gamma_\alpha(|\xi_{A_\alpha}|) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \right).$$

Bemerkung:

Dieses Lemma bleibt richtig, wenn wir darin und in ($\mathcal{A}_1$) ξ_{A_α} durch ξ ersetzen. Der Beweis läßt sich ohne Schwierigkeiten übertragen (vgl. Bemerkung Seite 6 f).

Beweis von Lemma 6:

Sei $x \in \Omega$, $|\alpha| \leq m$, $t \geq 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^S$ so bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(x, \alpha, t, \xi)$ den Vektor aus $\mathbb{R}^S$, dessen Komponenten bis auf die verschwinden, welche zu α gehört, diese sei $t \cdot \text{sign}(A_\alpha(x, \xi))$ also:

$$(\mathcal{A}(x, \alpha, t, \xi))_{\alpha'} = 0 \quad \text{für } \alpha \neq \alpha' \quad \text{und}$$

$$(\mathcal{A}(x, \alpha, t, \xi))_\alpha = t \cdot \text{sign}(A_\alpha(x, \xi)).$$

Nach Voraussetzung gilt nun für festes $\tilde{\alpha}$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \mathcal{A}(x, \tilde{\alpha}, t, \xi))) \cdot (\xi_\alpha - (\mathcal{A}(x, \tilde{\alpha}, t, \xi))_\alpha) \geq 0;$$

Dies ergibt:

$$t \cdot |A_{\tilde{\alpha}}(x, \xi)| \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \right) + t \cdot \text{sign}(A_{\tilde{\alpha}}(x, \xi)) \cdot$$

$$\cdot A_{\tilde{\alpha}}(x, \mathcal{A}(x, \tilde{\alpha}, t, \xi)) - \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \mathcal{A}(x, \tilde{\alpha}, t, \xi)) \cdot \xi_\alpha$$

Setzen wir:

$h_{\alpha}^{\nu}(x, r) := \sup \{ t \geq 0 \mid \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^S \text{ mit } |\xi_{A_{\alpha}^{\nu}}| \geq r \text{ gilt:}$

$$t \cdot |\operatorname{sign} A_{\alpha}^{\nu}(x, \xi)| \cdot |A_{\alpha}^{\nu}(x, \mathcal{A}(x, \tilde{\alpha}, t, \xi))| + \left| \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, \mathcal{A}(x, \tilde{\alpha}, t, \xi)) \cdot \xi_{\alpha} \right| \\ \leq \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, \xi) \cdot \xi_{\alpha} \} ,$$

so gibt es ein $R_{\alpha}^{\nu} > R_2$, so daß $h_{\alpha}^{\nu}(x, r)$ für $r > R_{\alpha}^{\nu}$ f.ü. wohl definiert ist. Denn einerseits ist wegen $(\mathcal{A}_1)$ f.ü.:

$$t \cdot |\operatorname{sign}(A_{\alpha}^{\nu}(x, \xi))| \cdot |A_{\alpha}^{\nu}(x, \mathcal{A}(x, \alpha, t, \xi))| + \left| \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, \mathcal{A}(x, \tilde{\alpha}, t, \xi)) \cdot \xi_{\alpha} \right| \\ \leq t \cdot \check{d}(t) + s \cdot \check{d}(t) \cdot |\xi|$$

Andererseits gilt wegen $|\xi| \geq |\xi_{A_{\alpha}^{\nu}}| \geq r \geq R_2$

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, \xi) \cdot \xi_{\alpha} \geq \Pi(|\xi|) \cdot |\xi| \geq \Pi(r) \cdot |\xi| - K_3,$$

mit $\Pi(r) \rightarrow \infty$, wenn $r \rightarrow \infty$.

Sei $g_{\alpha}^{\nu}(r) := \inf_{x \in \Omega, \text{ f.ü.}} \{ h_{\alpha}^{\nu}(x, r) - 1 \}$ so gilt $g_{\alpha}^{\nu}(r) \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow \infty$.

Wenn wir nun R_3 so groß wählen, daß $R_3 \geq \max_{|\tilde{\alpha}| \leq m} \{ R_{\tilde{\alpha}}^{\nu} \}$

und $g_{\tilde{\alpha}}^{\nu}(r) > 0$ für $r \geq R_3$ und alle $\tilde{\alpha}$ mit $|\tilde{\alpha}| \leq m$, dann ist

$$g_{\tilde{\alpha}}^{\nu}(|\xi_{A_{\alpha}^{\nu}}|) A_{\alpha}^{\nu}(x, \xi) \leq 2 \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, \xi) \cdot \xi_{\alpha} \text{ f.ü. für alle } \xi \in \mathbb{R}^S \text{ mit } |\xi_{A_{\alpha}^{\nu}}| \geq R_3.$$

Definieren wir für $r \geq R_3$, $\gamma_{\alpha}(r) := \frac{2}{g_{\alpha}^{\nu}(r)}$ so folgt die Behauptung von

Lemma 6.

Mit diesem Lemma folgt nun unmittelbar

Korollar 1

Der Differentialoperator $A(u)$ genüge $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, sei $f \in \mathcal{L}$,

weiter gebe es $p > 1$, $c_1 > 0$, und $R_4 > 0$, so daß f.ü.:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi) \xi_\alpha \geq c_1 |\xi|^p \quad \text{für } |\xi| \geq R_4, \text{ so gibt es eine}$$

schwache Lösung des Dirichletproblems $A(u) = f$.

§ 4. Das Variationsproblem

Eine schwache Lösung des Problems $A(u) = f$ ist wegen (A_2) schwache Lösung der Eulergleichung des Variationsproblems

$$I(u_0) = \min \{ I(v) \mid v \in W_0^{m,p}(\Omega) \}, \quad \text{mit}$$

$$I(u) := \int_{\Omega} F(., D(u)) \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx$$

Setzen wir neben (A_2) für F noch voraus:

$$(\mathcal{F}_1) \quad F(x, \xi) \geq 0 \quad \text{f. ü. für alle } \xi \in \mathbb{R}^S,$$

$$(\mathcal{F}_2) \quad \int_{\Omega} F(., D(u)) \, dx \rightarrow \infty \quad \text{wenn } \|u(x)\|_{m,p} \rightarrow \infty,$$

so ist $I(u)$ schwach unterhalbstetig in $W_0^{m,p}(\Omega)$ (wie üblich setzen wir $I(u) = +\infty$ wenn $\int_{\Omega} F(., D(u)) \, dx$ nicht existiert). Wegen $(\mathcal{F}_2)$ ist jede Minimalfolge in $W_0^{m,p}(\Omega)$ beschränkt, so daß wir wissen, daß es eine Lösung des Variationsproblems $I(u) = \min \{ I(v) \mid v \in W_0^{m,p}(\Omega) \}$ gibt (vgl.: [10], Kap. 1.8, 1.9). Es ist jedoch nicht klar, ob bei beliebigem Wachstum von $F(x, \xi)$ in ξ eine Lösung des Variationsproblems u_0 auch schwache Lösung der Eulergleichung ist, abgesehen vom Fall $m = 1$, $f \equiv 0$ und weiteren Regularitätsvoraussetzungen an F und Ω zu Randwerten $\phi \in C^2(\partial\Omega)$ (vgl.: [10], Kap. 1.10, 1.11, 4.3). Wir können nun eine Bedingung angeben, die mehr als polynomiales Wachstum von F und damit von den partiellen Ableitungen A_α zuläßt, unter der ein Minimum u_0 schwache Lösung der Eulergleichung ist:

Satz 2:

$F(x, \xi): \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ genüge $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_1)$. Sei $I(u_0) = \min\{I(v) \mid v \in W_0^{m,p}(\Omega)\}$.
Zu jedem $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gebe es ein $c > 0$ derart, daß $\int_\Omega F(., D(u_0 + cv)) dx < \infty$
und $\int_\Omega F(., D(u_0 - cv)) dx < \infty$, dann ist u_0 schwache Lösung der Euler-
gleichung d. h.: für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(., D(u_0)) D^\alpha(v) dx = \int_\Omega f \cdot v dx = 0.$$

Bemerkung:

Wir wissen nicht, ob dieses Minimum u_0 mit der im Satz 1 gefundenen Lösung übereinstimmt. Wir wissen nicht einmal, ob $A_\alpha(., D(u_0)) \in L^1(\cdot)$ und deshalb auch nicht, ob $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir die folgenden Eigenschaften einer konvexen Funktion.

Hilfssatz 4

Sei $\phi: \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ konvex stetig differenzierbar, so gilt für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^S$, $0 < t < 1$

$$i) \quad |\phi(\xi + \eta) - \phi(\xi)| \leq \max \{ \phi(\xi + \eta) - \phi(\xi), \phi(\xi - \eta) - \phi(\xi) \}$$

$$ii) \quad \frac{1}{t} |\phi(\xi + t\eta) - \phi(\xi)| \leq \max \{ \phi(\xi + \eta) - \phi(\xi), \phi(\xi - \eta) - \phi(\xi) \}.$$

Beweis:

i) Ist $\phi(\xi + \eta) - \phi(\xi) \geq 0$, so ist die Behauptung trivial.

Sei also $\phi(\xi + \eta) - \phi(\xi) < 0$, dann gilt $\phi(\xi - \eta) - \phi(\xi) \geq 0$
denn wegen ϕ konvex und stetig differenzierbar wissen wir
 $\phi(\xi + \xi') - \phi(\xi) \geq (\nabla \phi(\xi) \cdot \xi')$ für alle $\xi' \in \mathbb{R}^S$, also ist
 $0 \geq \phi(\xi + \eta) - \phi(\xi) \geq (\nabla \phi(\xi) \cdot \eta)$ und damit:
 $0 \leq -(\nabla \phi(\xi) \cdot \eta) \leq \phi(\xi - \eta) - \phi(\xi)$

Weiter ist für jedes $\xi, \eta \in \mathbb{R}^S$ die Abbildung $\tilde{\phi}(t): \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$
 $\tilde{\phi}(t) = \phi(\xi + t\eta)$ konvex, also ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\xi + t\eta) = \sum_{i=1}^S \frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi(\xi + t\eta) \cdot \eta_i \quad \text{monoton wachsend in } t.$$

Der Mittelwertsatz sichert nun die Existenz von Zahlen τ_1 und τ_2 ,
 $0 \leq \tau_1 \leq 1$, $0 \leq \tau_2 \leq 1$, so daß:

$$\phi(\xi) - \phi(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi(\xi + \tau_1 \eta) \right) (-\eta_i),$$

$$\phi(\xi - \eta) - \phi(\xi) = \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \phi(\xi + \tau_2 \eta) \right) (-\eta_i).$$

Es ist $1 + \tau_2 \geq \tau_1$, also gilt:

$0 \leq \phi(\xi) - \phi(\xi + \eta) \leq \phi(\xi - \eta) - \phi(\xi)$. Damit ist i) bewiesen.

ii) Da ϕ konvex ist, können wir mit i) schließen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} |\phi(\xi + t\eta) - \phi(\xi)| &\leq \frac{1}{t} \max\{\phi(\xi + t\eta) - \phi(\xi), \phi(\xi + t(-\eta)) - \phi(\xi)\} \\ &= \frac{1}{t} \max\{\phi(t(\xi + \eta) + (1-t)\xi) - \phi(\xi), \phi(t(\xi - \eta) + (1-t)\xi) - \phi(\xi)\} \\ &\leq \frac{1}{t} \max\{t\phi(\xi + \eta) + (1-t)\phi(\xi) - \phi(\xi), t(\phi(\xi - \eta) - \phi(\xi))\} \\ &= \max\{\phi(\xi + \eta) - \phi(\xi), \phi(\xi - \eta) - \phi(\xi)\}. \end{aligned}$$

Beweis von Satz 2 :

Für fast alle $x \in \Omega$ gilt also mit $\tilde{v} = c(v) \cdot v$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} |F(x, D(u_0 \pm t\tilde{v})(x)) - F(x, D(u_0)(x))| \\ \leq \max\{F(x, D(u_0 + \tilde{v})(x)) - F(x, D(u_0)(x)), F(x, D(u_0 - \tilde{v})(x)) - F(x, D(u_0)(x))\} \\ \leq |F(x, D(u_0 + \tilde{v})(x))| + 2|F(x, D(u_0)(x))| + |F(x, D(u_0 - \tilde{v})(x))| \end{aligned}$$

woraus mit dem Satz von Lebesgue folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{t} (F(., D(u_0 \pm t\tilde{v})) - F(., D(u_0))) dx = \\ = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, D(u_0)(x)) \cdot D^{\alpha}(\tilde{v})(x) dx \end{aligned}$$

Da u_0 das Minimum von $I(u)$ ist folgt hieraus sofort:

$$0 \leq \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(\cdot, D(u_0)) \cdot D^{\alpha}(\tilde{v}) \, dx - \int_{\Omega} f \cdot \tilde{v} \, dx \leq 0$$

und durch Multiplikation der letzten Ungleichung mit $\frac{1}{c(v)}$ die Behauptung des Satzes.

Man sieht sofort, daß mit der folgenden Bedingung, die ein höchstens exponentielles Wachstum von $F(x, \xi)$ in ξ erlaubt, aus $F(x, D(u_0)) \in L^1(\Omega)$ auf $F(\cdot, D(u_0+v)) \in L^1(\Omega)$ für alle $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ schließen läßt:

($\mathcal{F}_3$) Es sei f.ü. $|F(x, \xi + \xi')| \leq |F(x, \xi)| \cdot \exp(|\xi'|)$ für alle $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^S$.

Zwar wissen wir nicht, ob die durch obige Galerkinapproximation erhaltene schwache Lösung u_a von $A(u) = f$ ein Minimum von $I(u)$ ist, doch können wir von $I(u_a)$ folgende Minimaleigenschaft zeigen:

Satz 3:

Sei u_a die Lösung, die wir durch die obige Galerkinapproximation unter den Voraussetzungen ($\mathcal{A}_1$) bis ($\mathcal{A}_4$) in § 2 erhalten haben, so gilt:

i) $I(u_a) \leq I(v)$ für alle $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Sei $I(u_a+v) = +\infty$, wenn $\int_{\Omega} F(\cdot, D(u_a+v))$ nicht existiert, so ist

ii) $I(u_a) \leq I(u_a+v)$ für alle $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Beweis:

i) Sei $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Teilfolge von Galerkinlösungen aus (5) mit $u_k \rightharpoonup u_a$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$, $u_k \in V_{n(k)}$ dann gilt für $v \in V_{n_0(k)}$:

$$-I(v) + I(u_k) \leq \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(\cdot, D(u_k)) \cdot D^{\alpha}(u_k - v) \, dx - \int_{\Omega} f \cdot (u - v) \, dx = 0$$

Also gilt:

$$(10) \quad I(u_k) \leq I(v) \quad \text{für alle } v \in V_{n_0(k)}.$$

Da $u_k \in V_{n_0(k+1)}$ ist $\{I(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge, die wegen Lemma 1 und $\int_{\Omega} f \cdot u_k \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f \cdot u_a \, dx$ konvergiert. In § 2

haben wir gezeigt $D^{\alpha}(u_k)(x) \rightarrow D^{\alpha}(u_a)(x)$ f. ü., also ist mit dem Lemma von Fatou:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(., D(u_k)) \, dx \geq \int_{\Omega} F(., D(u_a)) \, dx \quad \text{und damit}$$

$$(11) \quad I(u_k) \geq I(u_a).$$

Setzen wir $\tilde{F}(x, \xi) := F(x, \xi) - F(x, 0)$, dann ist:

$$|\tilde{F}(x, \xi)| \leq s \cdot \tilde{\mathcal{A}}(|\xi|) \cdot |\xi|.$$

Denn wegen $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2)$ gibt es $0 \leq \tau \leq 1$, so daß:

$$(12) \quad |F(x, \xi) - F(x, 0)| = |\tilde{F}(x, \xi)| = \left| \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, \tau \xi) \cdot \xi_{\alpha} \right| \\ \leq s \cdot \tilde{\mathcal{A}}(|\xi|) \cdot |\xi|$$

Zu $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ gibt es nun eine Folge $v_k \in V_{n_0(k)}$ mit $v_k \rightarrow v$ in der $C_0^m(\Omega)$ Norm. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{F}(x, \xi)$ in ξ gilt also $\tilde{F}(x, D(v_k))(x) \rightarrow \tilde{F}(x, D(v))(x)$ f.ü., und wegen (12) können wir mit dem Satz von Lebesgue schließen:

$$\int_{\Omega} \tilde{F}(x, D(v_k))(x) \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \tilde{F}(x, D(v))(x) \, dx \quad \text{und damit auch } I(v_k) \rightarrow I(v).$$

Aus (10) und (11) folgt sofort $I(v) \geq I(u_a)$.

ii) Ist $I(u_a + v) = \infty$, so ist die Behauptung trivial.

Es existiere also $\int_{\Omega} F(., D(u_a + v)) \, dx$. Wegen der punktweisen Abschätzung:

$$f(x) \cdot (u_a + v)(x) - F(x, D(u_a + v)(x)) - f(x) \cdot u_a(x) + F(x, D(u_a)(x))$$

$$\leq - \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, D(u_a)(x)) \cdot D^\alpha(v)(x) + f(x) \cdot v(x)$$

folgt die Behauptung sofort nach Integration beider Seiten über Ω .
Satz 3 ist damit bewiesen.

Teil 2

Operatoren der Form $A(u) + B(u)$

Im 2. Teil wollen wir Differentialoperatoren der Form $A(u) + B^i(u)$ $i = 1, 2, 3$ betrachten. Dabei ist B^1 ein Operator der Ordnung $2m$, der eine beschränkte Abbildung $W_0^{m,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{m,p}(\Omega))^*$ definiert, und dessen Terme höchster Ordnung einer Monotoniebedingung genügen. Dagegen ist das Wachstum von B^2 nur in gewisser Weise durch das Wachstum von F bzw. A beschränkt. B^2 muß jedoch noch eine stärkere Monotoniebedingung (B_5) und eine weitere jedoch nicht das Wachstum einschränkende Bedingung erfüllen. B^3 ist ein Operator der Ordnung $2(m-1)$ wie ihn F.E. Browder in [3] betrachtet. Zuerst müssen wir unseren Lösungsbegriff auf die neue Situation übertragen.

Definition 3

Sei $i = 1, 2$. Der zu $A + B^i$ gehörende Operator $\mathcal{L}_i: \mathcal{D}(\mathcal{L}_i) \rightarrow (W_0^{m,p}(\Omega))^*$ sei definiert durch

$$i) \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_i) \subset W_0^{m,p}(\Omega) \Leftrightarrow A_\alpha(\cdot, D(u)), B_\alpha^i(\cdot, D(u)) \in L^1(\Omega)$$

für alle α mit $|\alpha| \leq m$ und es gibt :

$g \in (W_0^{m,p}(\Omega))^*$, so daß für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{\Omega} A_\alpha(\cdot, D(u)) \cdot D^\alpha(v) \, dx + \int_{\Omega} B_\alpha^1(\cdot, D(u)) D^\alpha(v) \, dx \right) = (g, v)$$

$$ii) \quad \mathcal{L}_i(u) := g.$$

Analog sei $\mathcal{L}_3$ zu $A(u) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha^3(\cdot, D^{(0,m-1)}(u))$ definiert.

Zu $f \in \mathcal{L}$ ist $u_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$ schwache Lösung des Dirichletproblems

$$A(u) + B^i(u) = f, \quad \text{wenn } u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_i) \text{ und } \mathcal{L}_i(u) = f.$$

Wir schränken noch die Voraussetzung für A etwas ein, um im Folgenden, die Beweise nicht mit technischen Details zu überlasten:

(A₁) i) die Abbildung $A_\alpha(\cdot, \cdot): \Omega \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ genüge der Caratheodorybedingung

ii) Für jedes $c > 0$ gebe es $\tilde{K}(c)$, so daß

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leq \check{K}(c) \quad \text{wenn } |\xi_{A_\alpha}| \leq c.$$

$$\text{iii) } A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \geq 0 \text{ f.ü., für alle } \xi \in \mathbb{R}^S.$$

(A₂) Es gibt für fast jedes $x \in \Omega$ eine stetig differenzierbare, strikt konvexe Funktion $F(x, \cdot): \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß

$$\text{i) } F \text{ genügt den Caratheodorybedingungen, } F(x, 0) \equiv 0, F(x, \xi) \geq 0.$$

$$\text{ii) } \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} F(x, \xi) = A_\alpha(x, \xi) \text{ f.ü. für alle } \xi \in \mathbb{R}^S.$$

$$(A_3) \text{ Zu } \alpha \text{ gebe es Funktionen } \gamma_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_\alpha(r) = 0, \text{ so daß}$$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leq \gamma_\alpha(|\xi|) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha) \right)$$

Bemerkung: $F(x, 0) \equiv 0$ ist keine Einschränkung, da mit $F(x, \xi)$ auch die Funktion $\tilde{F}(x, \xi) := F(x, \xi) - F(x, 0)$ die Bedingung (A₂) erfüllt. $F(x, \xi) \geq 0$ folgt dann aus $A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \geq 0$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

Für alle Operatoren $B^i(u)$, $i = 1, 2, 3$ setzen wir voraus.:

(B₁) Sei $\sigma_i = s$ für $i = 1, 2$; $\sigma_3 = s_{(0, m-1)}$ so gilt:

$$\text{i) die Abbildungen } B_\alpha^i(\cdot, \cdot): \Omega \times \mathbb{R}^{\sigma_i} \rightarrow \mathbb{R} \text{ genügen der Caratheodorybedingung.}$$

$$\text{ii) Für jedes } c > 0 \text{ gibt es } \check{K}(c) < \infty, \text{ so daß}$$

$$|B_\alpha^i(x, \xi)| \leq \check{K}(c), \text{ wenn } |\xi_{B_\alpha^i}| \leq c, \quad \text{für } |\alpha| \leq m \text{ und } i = 1, 2$$

$$\text{bzw. } |\alpha| \leq m-1 \text{ und } i = 3.$$

$$\text{iii) } B_\alpha^i(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \geq 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^{\sigma_i}, \quad \text{für } |\alpha| \leq m \text{ und } i = 1, 2$$

$$\text{bzw. } |\alpha| \leq m-1 \text{ und } i = 3.$$

§ 5 Der monotone Operator $B^1(u)$ mit beschränktem Wachstum.

An den Differentialoperator $B^1(u)$ stellen wir ähnliche Bedingungen wie C.G. Simader in [11] an den in unserer Einleitung definierten Operator $B(u)$:

(B₂) Es gibt $\chi(x) \in L^{p'}(\Omega)$, ($p' = \frac{p}{p-1}$), so daß mit $c_3 > 0$ gilt:

$$|B_\alpha^1(x, \xi)| \leq c_3 \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi_\alpha|^{p-1} \right) + \chi(x).$$

(B₃) Für alle $\xi^m, \xi^m \in \mathbb{R}^{S_m}$ und alle $\xi^{(0, m-1)} \in \mathbb{R}^{S(0, m-1)}$ gilt:

$$\sum_{|\alpha| = m} (B_\alpha^1(x, \xi^{(0, m-1)}, \xi^m) - B_\alpha^1(x, \xi^{(0, m-1)}, \xi^m)) (\xi_\alpha - \xi_\alpha^m) \geq 0,$$

damit gilt nun der folgende Satz:

Satz 4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte Menge, so daß die Sobolev'schen Einbettungssätze gelten. Gegeben sei der Differentialoperator

$$A(u) + B^1(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha A_\alpha(\cdot, D(u)) + D^\alpha B_\alpha^1(\cdot, D(u)))$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$A(u)$ genügt den Voraussetzungen (A_1) , (A_2) , (A_3) ,

$B(u)$ genügt (B_1) , (B_2) , (B_3) .

Dann gibt es zu $f \in \mathcal{L}$ eine schwache Lösung des Dirichletproblems

$A(u) + B(u) = f$, wenn für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$(A(u) + B^1(u), u) (||u||_{m,p})^{-1} \rightarrow \infty, \text{ wenn } ||u||_{m,p} \rightarrow \infty.$$

Beweis:

1.) Sei $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$, die in § 3 definierte in $W_0^{m,p}(\Omega)$ dichte Folge von $C_0^\infty(\Omega)$ -Funktionen. $V_n := \text{span} \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$.

Sei $(A(u), v)_{\Omega'} := \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(\cdot, D(u)) (D^\alpha(v)) dx$ und analog

$(B^1(u), v)_{\Omega'}$ definiert. Wie in Lemma 1 beweist man die Existenz einer Folge von Galerkinlösungen $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ mit den Eigenschaften

$$(13) \quad (A(u_n), v) + (B(u_n), v) = (f, v) \quad \text{für alle } v \in V_n$$

und

$$(14) \quad \|u_n\|_{m,p} \leq C.$$

Wir können eine Teilfolge auswählen, die wir wieder mit $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ bezeichnen, so daß für ein $u_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt:

$$(15) \quad \begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0 \text{ in } W_0^{m,p}(\Omega); D^\alpha(u_n) \rightharpoonup D^\alpha(u_0) \text{ in } L^p(\Omega) \text{ und f.ü.} \\ D^\alpha(u_n)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x) \text{ für } |\alpha| \leq m-1; D^\alpha(u_n) \rightharpoonup D^\alpha(u_0) \text{ in } L^p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq m. \end{cases}$$

2.) Setzen wir u_n in (13) ein, so erhalten wir wegen (B_1)

$$(A(u_n), u_n) = (\tilde{f}, u_n) - (B^1(u_n), u_n) \leq (\tilde{f}, u_n)$$

Damit kann der Beweis von Lemma 2 übernommen werden. Es existiert also eine Konstante $K_4 > 0$, so daß

$$(16) \quad -K_4 \leq \phi(u_n) = \int_{\Omega} F(., D(u_n)) \, dx \leq K_4.$$

Zu einer monoton fallenden Nullfolge $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ konstruieren wir wie in § 2 die Folge $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^\infty$ und wählen aus $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ die Teilfolge $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, so daß gilt:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt } v_0(k), v_1(k) \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < v_0(k) < v_1(k) < \infty, \text{ so daß} \\ \alpha) \text{ für } n \geq v_0(k): |\phi(u_n) - K_5| \leq \frac{\varepsilon_k}{4}, \text{ mit einem } K_5 \in \mathbb{R}, -K_4 \leq K_5 \leq K_4. \\ \beta) \tilde{u}_k := \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k(u_n), \text{ mit } \omega_n^k > 0 \text{ und } \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k = 1; \|\tilde{u}_k - u_0\|_{m,p} < \varepsilon_k. \\ \gamma) u_k := u_{n_0(k)} \text{ mit } n_0(k) := v_1(k), \text{ also ist } u_k \text{ Galerkinlösung in} \\ v_{n_0(k)} \text{ und } \tilde{u}_k \in v_{n_0(k)} \\ \text{Für } k \rightarrow \infty \text{ gelten die Konvergenzen:} \\ u_k \rightharpoonup u_0, \tilde{u}_k \rightarrow u_0 \text{ in } W_0^{m,p}(\Omega), D^\alpha(\tilde{u}_k)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x) \text{ f.ü. für } |\alpha| \leq m \\ D^\alpha(u_k) \rightarrow D^\alpha(u_0) \text{ für } |\alpha| \leq m-1, D^\alpha(u_k) \rightharpoonup D^\alpha(u_0) \text{ für } |\alpha| = m \text{ in } L^p(\Omega); \\ D^\alpha(u_k)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x) \text{ f.ü. } |\alpha| \leq m-1. \end{array} \right.$$

3.) Für $A(u)$ gelten dann Lemma 3 und Lemma 4, wenn wir zeigen können:

$$(18) \quad \limsup (A(u_k), u_k - \tilde{u}_k) \leq 0.$$

Aus (B_2) folgt $B_\alpha^1(\cdot, D(u_k)) \in L^p(\Omega)$, und mit (14) $\|B_\alpha^1(\cdot, D(u_k))\|_p \leq C$.

Da für $|\alpha| \leq m-1$: $D^\alpha(u_k) \rightarrow D^\alpha(u_0)$ in $L^p(\Omega)$ folgt:

$$(19) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m-1} B_\alpha^1(\cdot, D(u_k)) (D^\alpha(u_k) - D^\alpha(\tilde{u}_k)) \, dx = 0.$$

Setzen wir nun $(\tilde{u}_k - u_k) \in V_{n_0(k)}$ in (13) ein und addieren auf beiden

Seiten der Gleichung $\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| = m} B_\alpha^1(\cdot, D^{(0,m-1)}(u_k), D^m(\tilde{u}_k)) (D^\alpha(\tilde{u}_k - u_k)) \, dx$,

so erhalten wir mit (B_3) :

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega} B_\alpha^1(\cdot, D^{(0,m-1)}(u_k), D^m(\tilde{u}_k)) (D^\alpha(\tilde{u}_k - u_k)) \, dx + (f, u_k - \tilde{u}_k) = \\ & = (A(u_k), u_k - \tilde{u}_k) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_{\Omega} B_\alpha^1(\cdot, D(u_k)) (D^\alpha(u_k - \tilde{u}_k)) \, dx + \\ (20) \quad & \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| = m} (B_\alpha^1(\cdot, D^{(0,m-1)}(u_k), D^m(\tilde{u}_k)) - B_\alpha^1(\cdot, D^{(0,m-1)}(u_k), D^m(u_k))) \cdot \\ & \quad \cdot (D^\alpha(\tilde{u}_k - u_k)) \, dx \\ & \geq (A(u_k), u_k - \tilde{u}_k) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_{\Omega} B_\alpha^1(\cdot, D(u_k)) (D^\alpha(u_k - \tilde{u}_k)) \, dx \end{aligned}$$

$$\text{Gilt } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega} B_\alpha^1(\cdot, D^{(0,m-1)}(u_k), D^m(\tilde{u}_k)) (D^\alpha(\tilde{u}_k - u_k)) \, dx = 0,$$

so folgt aus (19) und (20) die Abschätzung (18). Da $D^\alpha(\tilde{u}_k - u_k) \rightarrow 0$ in $L^p(\Omega)$ genügt es zu zeigen:

$$B_\alpha^1(\cdot, D^{(0,m-1)}(u_k), D^m(\tilde{u}_k)) \rightarrow B_\alpha^1(\cdot, D(u_0)) \text{ in } L^{p'}(\Omega).$$

Dies folgt aber aus $D^\alpha(u_k) \rightarrow D^\alpha(u_0)$ in $L^p(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m-1$,

$D^\alpha(\tilde{u}_k) \rightarrow D^\alpha(u_0)$ in $L^p(\Omega)$ für $|\alpha| = m$, so wie der punktweisen Konvergenz

dieser Folgen und der Abschätzung

$$\begin{aligned} |B_{\alpha}(x, D^{(0, m-1)}(u_k)(x), D^m(\tilde{u}_k)(x))|^{p'} &\leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq m-1} |D^{\alpha}(u_k)(x)|^p + \\ &+ C c_1 \sum_{|\alpha| = m} |D^{\alpha}(\tilde{u}_k)(x)|^p + C |\chi(x)|^{p'} \end{aligned}$$

mit Hilfe des Satzes von Vitali.

4.) Da wir nun wissen, daß Lemma 3 und Lemma 4 für $A(u)$ gelten, konvergiert für $|\alpha| \leq m$: $D^{\alpha}(u_k)(x) \rightarrow D^{\alpha}(u_0)(x)$, $A_{\alpha}(x, D(u_k)(x)) \rightarrow A_{\alpha}(x, D(u_0)(x))$ und $B_{\alpha}(x, D(u_k)(x)) \rightarrow B_{\alpha}(x, D(u_0)(x))$ f.ü.

Wegen $\|B_{\alpha}^1(\cdot, D(u_k))\|_{p'} \leq C$ und der punktweisen Konvergenz, gilt $B_{\alpha}^1(\cdot, D(u_k)) \rightarrow B_{\alpha}^1(\cdot, D(u_0))$ in $L^{p'}(\Omega)$ (vgl. [7], Seite 207)

Wie in § 3 folgt aus $\langle A(u_k), u_k \rangle \leq C$, daß $A_{\alpha}(\cdot, D(u_k)) \rightarrow A_{\alpha}(\cdot, D(u_0))$ in $L^1(\Omega)$. Für $v \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ können wir damit schließen (vgl.: § 3):

$$\langle \tilde{f}, v \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle A(u_k), v \rangle + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle B^1(u_k), v \rangle = \langle A(u_0), v \rangle + \langle B^1(u_0), v \rangle$$

Für $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ existiert wieder eine Folge $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $v_n \in V_n$, so daß

$$\langle \tilde{f}, v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \tilde{f}, v_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A(u_0), v_n \rangle + \lim_{n \rightarrow \infty} \langle B^1(u_0), v_n \rangle$$

= $\langle A(u_0), v \rangle + \langle B^1(u_0), v \rangle$, da $v_n \rightarrow v$ in der C^m Norm, angenommen werden kann. Es ist also $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_1)$ und $\mathcal{L}_1(u_0) = \tilde{f}$. Satz 4 ist somit bewiesen.

§ 6 Der monotone Operator $B^2(u)$ mit etwas geringerem Wachstum als $A(u)$

Die Schranke für das Wachstum von B^1 (Voraussetzung (B_3)) hängt vom minimalen von $A + B^1$ ab; das von A unterliegt dagegen keinerlei Beschränkung. Deshalb wollen wir die Existenz von schwachen Lösungen unter einer der beiden folgenden Voraussetzungen zeigen, die das Wachstum von $B^2(u)$ mit dem von $F(u)$ bzw. $A(u)$ verbinden.

(B₄) Es gibt eine monoton fallende Funktion $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r) = 0$, und $K_6 > 0$, so daß für fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (B_\alpha^2(x, \xi) \cdot \xi_\alpha) \leq \gamma(|\xi|) \cdot F(x, \xi) + K_6 \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi_\alpha|^p \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^S$$

(B₅) Es ist $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ wie in (B₄); durch $\sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(x, \xi) \cdot \xi_\alpha :$

$\mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ wird eine konvexe Funktion definiert und es gilt:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \leq \gamma(|\xi|) \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha$$

Statt der Bedingung (A₂) benötigen wir für $B^2(u)$ nur

(B₆) Für fast alle $x \in \Omega$ gilt: $\sum_{|\alpha| \leq m} (B_\alpha^2(x, \xi) - B_\alpha^2(x, \xi')) \cdot (\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geq 0$
für alle $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^S$.

Die analoge Bedingung zu (A₃) lautet:

(B₇) Es gibt eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ wie in (B₄), so daß für fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$|B_\alpha^2(x, \xi)| \leq \gamma(|\xi_{B_\alpha^2}|) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(x, \xi) \xi_\alpha \right) \text{ für alle}$$

$\xi \in \mathbb{R}^S$, dabei sei $\xi_{B_\alpha^2}$ analog zu ξ_{A_α} definiert.

Für den Operator $B^2(u)$ muß darüber hinaus noch eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

(B₈) Es gibt $K_7 > 0$, so daß f.ü. für alle $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^S$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(x, \xi) \xi'_\alpha \leq \sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(x, \xi) \xi_\alpha + K_7 \sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(x, \xi') \xi'_\alpha$$

(B₉) Es gibt $K_8 > 0$, so daß f.ü. für alle $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^S$:

$$- \sum_{|\alpha| \leq m} B_{\alpha}^2(x, \xi) \xi_{\alpha}^2 \leq K_8 \left(\sum_{|\alpha| \leq m} B_{\alpha}^2(x, \xi) \cdot \xi_{\alpha} + \sum_{|\alpha| \leq m} B_{\alpha}^2(x, \xi) \xi_{\alpha}^2 \right)$$

Bemerkungen:

1.) Die Bedingung (B_8) benutzt auch C.G. Simader in [11] für den Operator $G(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha}(p_{\alpha} \cdot g_{\alpha}(D^{\alpha}(u)))$.

2.) Ist $\sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, \xi) \cdot \xi_{\alpha} : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ f.ü. eine konvexe Funktion, so

können wir in (B_4) $F(x, \xi)$ durch $\sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x, \xi) \xi_{\alpha}$ ersetzen.

Es gilt nun

Satz 5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, so daß die Sobolev'schen Einbettungssätze gelten. Gegeben sei der Differentialoperator

$$A(u) + B^2(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle u, A_{\alpha}(\cdot, D(u)) \rangle + E^{\alpha}(\cdot, D(u))$$

mit den Eigenschaften:

- i) $A(u)$ genügt den Voraussetzungen (A_1) , (A_2) und (A_3)
- ii) $B(u)$ genügt den Voraussetzungen (B_1) , (B_6) , (B_7) und entweder (B_4) oder (B_5) , weiter gibt es zwei meßbare Mengen Ω_1 und Ω_2 , so daß $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ und (B_8) für $x \in \Omega_1$ sowie (B_9) für $x \in \Omega_2$ erfüllt ist.

Dann existiert zu jedem $f \in \mathcal{L}$ eine schwache Lösung des Dirichletproblems $A(u) + B^2(u) = f$, wenn für $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ $\langle A(u), u \rangle + \langle B^2(u), u \rangle (\|u\|_{m,p})^{-1} \rightarrow \infty$ mit $(\|u\|_{m,p}) \rightarrow \infty$.

Wir beweisen zunächst zwei Lemmata: Lemma 7 zeigt, daß für die Grenzfunktion u_0 der Folge von Galerkinlösungen $\sum_{|\alpha| \leq m} B_{\alpha}^2(\cdot, D(u_0)) D^{\alpha} u_0$

aus $L^1(\Omega)$ ist, während wir in Lemma 8 die Voraussetzungen dafür schaffen, um wieder die Abschätzung $\limsup (A(u_k), u_k - \tilde{u}_k) \leq 0$ beweisen zu können.

Lemma 7: Sei $D^\alpha(u_n) \rightarrow D^\alpha(u_0)$ in $L^p(\Omega)$, $D^\alpha(\tilde{u}_k) =$

$$= \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \cdot D^\alpha(u_n) \quad \text{mit} \quad \sum_{n=v_0(K)}^{v_1(K)} \omega_n^k = 1, \quad \text{und} \quad \omega_n^k \geq 0,$$

so daß $D^\alpha(\tilde{u}_k) \rightarrow D^\alpha(u_0)$ in $L^p(\Omega)$ und $D^\alpha(\tilde{u}_k)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x)$ f.ü., $|x| \leq m$.

Weiter gelte mit Konstanten $K_9 > 0$, $K_{10} > 0$ entweder

i) $B^2(u)$ genüge (B_1) , (B_4) , und $\int_{\Omega} F(., D(u_n)) dx \leq K_9$

oder

ii) $B^2(u)$ genüge (B_1) , (B_5) und es ist

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(., D(u_n)) \cdot D^\alpha(u_1) dx \leq K_{10}.$$

Dann gilt: $\sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(., D(u_0)) \cdot D^\alpha(u_0) \in L^1(\cdot)$ und $\sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(., D(\tilde{u}_k)) \cdot D^\alpha(\tilde{u}_k) \rightarrow$

$$\rightarrow \sum_{|\alpha| \leq m} (B_\alpha^2(., D(u_0)) \cdot D^\alpha(u_0)) \quad \text{in} \quad L^1(\Omega).$$

Beweis:

1.) Zuerst gelte i): Wir setzen $\tilde{\Omega}(k, r_0) = \{x \in \Omega \mid \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha(\tilde{u}_k)(x)|^2 \leq r_0^2\}$.

Für $x \in \tilde{\Omega}(k, r_0)$ ist $|D^\alpha(\tilde{u}_k)(x)| \leq r_0$, und damit wegen (B_1) , ii)

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |B_\alpha^2(x, D(\tilde{u}_k)(x)) \cdot D^\alpha(\tilde{u}_k)(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{K}(r_0 \cdot \sqrt{s}) \cdot r_0 =: \sigma(r_0).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben: Da $|D^\alpha(\tilde{u}_k)|^p \rightarrow |D^\alpha(u_0)|^p$ in $L^1(\Omega)$,

gibt es wegen des Satzes von Vitali zu $\frac{\varepsilon}{4}$ ein $\delta_1(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega'} K_6 |D^\alpha(\tilde{u}_k)|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle} \quad \Omega' \subset \Omega \quad \text{mit} \quad \mu(\Omega') < \delta_1(\varepsilon)$$

2.) Wir wählen nun r_0 so groß, daß $\gamma(r_0) \cdot K_9 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ und setzen

$\delta(\epsilon) := \min \{ \delta_1(\epsilon), \epsilon \cdot (2 \cdot \sigma(r_0))^{-1} \}$. Mit den Jensenschen Ungleichungen

gilt:

$$(B^2(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k)_{\Omega} \leq \int_{\Omega \cap \tilde{\Omega}(k, r_0)} \sum_{|\alpha| \leq m} B_{\alpha}^2(\cdot, D(\tilde{u}_k)) D^{\alpha}(\tilde{u}_k) dx + (B^2(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k)_{\Omega' \setminus \Omega}(k, r_0)$$

$$\leq \int_{\Omega' \cap \tilde{\Omega}(k, r_0)} \sigma(r_0) dx + \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha| \leq m} K_6 |D^{\alpha}(\tilde{u}_k)|^p dx + \gamma(r_0) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{n=v_1(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \int_{\Omega'} F(x, D(u_n)) dx \right) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4};$$

Der Satz von Vitali liefert somit die Behauptung.

3.) Es gelte ii): Setzen wir jetzt $\Omega(n, r_0) := \{x \in \Omega \mid \sum_{|\alpha| \leq m} |D^{\alpha}(u_n)(x)|^2 \leq r_0^2\}$.

Für $x \in \Omega(n, r_0)$ ist dann:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |B_{\alpha}^2(x, D(u_n)(x)) \cdot (D^{\alpha}(u_n)(x))| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{K}_{\alpha}(r_0 \sqrt{s}) \cdot r_0 =: \sigma(r_0)$$

Wir wählen wieder r_0 so groß, daß $\gamma(r_0) K_{10} \leq \frac{\epsilon}{2}$ und setzen

$\delta(\epsilon) = \epsilon(2\sigma(r_0))^{-1}$ so folgt:

$$(B^2(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k)_{\Omega} \leq \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha| \leq m} B_{\alpha}^2(\cdot, D(u_n)) D^{\alpha}(u_n) dx \leq$$

$$\leq \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \left(\int_{\Omega' \cap \Omega(n, r_0)} \sigma(r_0) dx + \gamma(r_0) (A(u_n), u_n)_{\Omega} \right) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Der Satz von Vitali liefert wieder die Behauptung. Lemma 7 ist damit bewiesen.

Wir wollen eine zu (18) analoge Abschätzung beweisen. Dazu wählen wir nun aus $\{u_k\}$ und $\{\tilde{u}_k\}$ in unterschiedlicher Weise Teilfolgen aus:

Lemma 8

Es gelte Lemma 7, darüber hinaus sei $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ monoton fallende Nullfolge $B^2(u)$ genüge noch (B_6) und $u_\kappa := u_k$ für $\kappa = k$.

i) Erfüllt $B^2(u)$ (B_8) , so gibt es $\lambda(j) \in \mathbb{N}$ mit

$j \leq \lambda(j) < \lambda(j+1)$, so daß für $k \geq \lambda(j)$ und alle $\kappa > k$ gilt:

$$(B^2(u_\kappa), \tilde{u}_k - u_\kappa) \leq \varepsilon_j.$$

ii) Erfüllt $B^2(u)$ (B_9) , so gibt es $\lambda_i(j)$ mit $j \leq \lambda_i(j) < \lambda_i(j+1)$

$i = 1, 2$ und $\lambda_1(j) \leq \lambda_2(j)$, so daß für $k = \lambda_1(j)$ und

$\kappa \geq \lambda_2(j)$ gilt:

$$(B(u_\kappa), \tilde{u}_k - u_\kappa) \leq \varepsilon_j.$$

Beweis:

1.) Da $\sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(., D(u_0)) D^\alpha(u_0)$ aus $L^1(\Omega)$ folgt mit dem Satz von

Vitali: Zu ε_j gibt es $\delta(j)$ derart, daß für Ω' mit $\mu(\Omega') \leq \delta(j)$.

$$(21) \quad (K_8+1)((B^2(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k)_{\Omega'} + (B^2(u_0), u_0)_{\Omega'}) \leq \frac{\varepsilon_j}{4}; \text{ und}$$

$$K_7 \cdot (B^2(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k)_{\Omega'} \leq \frac{\varepsilon_j}{4}.$$

Wir betrachten nun die folgende Menge:

$$H(l_1, l_2) := \left\{ \bigcup_{k \geq l_1} \left\{ \bigcup_{|\alpha| \leq m} \{x \in \Omega \mid |D^\alpha(\tilde{u}_k)(x)| > l_2 + 1\} \right\} \right\}$$

$$\cup \left\{ \bigcup_{|\alpha| \leq m} \{x \in \Omega \mid |D^\alpha(u_0)(x)| \geq l_2\} \right\}$$

Wegen $D^\alpha(u_0) \in L^1(\Omega)$ und der punktweisen Konvergenz von $D^\alpha(\tilde{u}_k)$

können wir mit dem Satz von Egorov zu $\delta(j)$, $l_1(j) \in \mathbb{N}$ und $l_2(j) \in \mathbb{N}$

so finden, daß $j \leq l_1(j) < l_1(j+1)$ und mit $H(j) := H(l_1(j), l_2(j))$ gilt:

$\mu(H(j)) \leq \delta(j)$.

i):

2.) Es gelte also (B_8) . Da $B^2(u)$ (B_6) erfüllt, ist für $\kappa \geq k \geq l_1(j)$

$$(B^2(u_\kappa), \tilde{u}_k - u_\kappa) \leq (B^2(u_\kappa), \tilde{u}_k - u_\kappa)_{\Omega \cap H(j)} + (B^2(u_\kappa), \tilde{u}_k - u_\kappa)_{\Omega \setminus H(j)} \leq$$

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \leq (B^2(u_\kappa), u_\kappa)_{\Omega \cap H(j)} + K_7 (B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa)_{\Omega \cap H(j)} - (B^2(u_\kappa), u_\kappa)_{\Omega \cap H(j)}) \\
 & + (B^2(u_\kappa) - B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_\kappa)_{\Omega \setminus H(j)} + (B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_\kappa)_{\Omega \setminus H(j)} \\
 & \leq \frac{\epsilon_j}{4} + (B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_\kappa)_{\Omega \setminus H(j)}.
 \end{aligned}$$

3.) Es bleibt also zu zeigen $(B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_\kappa)_{\Omega \setminus H(j)} \leq \frac{3}{4} \epsilon_j$

Wegen (B_1) und dem Satz von Lebesgue gilt:

$$B_\alpha^2(\cdot, D(\tilde{u}_\kappa)) \cdot D^\alpha(\tilde{u}_\kappa) \rightarrow B_\alpha^2(\cdot, D(u_0)) \cdot D^\alpha(u_0) \quad \text{in } L^1(\Omega \setminus H(j)), \quad B_\alpha^2(\cdot, D(\tilde{u}_\kappa))$$

$$\rightarrow B_\alpha^2(\cdot, D(u_0)) \quad \text{in } L^{p'}(\Omega \setminus H(j)). \quad \text{Weiter ist: } D^\alpha(u_\kappa) \rightarrow D^\alpha(u_0) \quad \text{in}$$

$L^p(\Omega \setminus H(j))$. Deshalb muß es zu ϵ_j ein $\lambda(j)$ geben mit $\lambda(j) \geq l_1(j)$

und $\lambda(j+1) > \lambda(j)$, so daß für alle $k \geq \lambda(j)$ und alle $\kappa \geq k$ gilt:

$$|(B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa)_{\Omega \setminus H(j)} - (B^2(u_0), u_0)_{\Omega \setminus H(j)}| \leq \frac{\epsilon_j}{4};$$

sowie

$$|(B^2(u_0), u_0 - u_\kappa)_{\Omega \setminus H(j)}| = \int_{\Omega \setminus H(j)} \sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(\cdot, D^\alpha(u_0)) (D^\alpha(u_0) - D^\alpha(u_\kappa)) \, dx \leq \frac{\epsilon_j}{4}$$

und

$$\begin{aligned}
 & |(B^2(u_0) - B^2(\tilde{u}_\kappa), u_\kappa)_{\Omega \setminus H(j)}| \leq \\
 & \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|B_\alpha^2(\cdot, D(\tilde{u}_\kappa)) - B_\alpha^2(\cdot, D(u_0))\|_{L^{p'}(\Omega \setminus H(j))} \cdot \|D^\alpha(u_\kappa)\|_{L^p(\Omega \setminus H(j))} \leq \frac{\epsilon_j}{4}
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies mit (22) die Behauptung i).

ii):

4.) Wir beachten zunächst, daß $B_\alpha^2(x, D^\alpha(\tilde{u}_\kappa)) \in L^\infty(\Omega)$. Deshalb gibt es zu k und j ein $J_0(k, j) \in \mathbb{N}$, von dem wir annehmen können $J_0(k, j) \geq k$, so daß für alle $\kappa \geq J_0(k, j)$ gilt:

$$|\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} B_\alpha^2(\cdot, D(\tilde{u}_\kappa)) (D^\alpha(u_\kappa) - D^\alpha(u_0)) \, dx| \leq \frac{\epsilon_j}{4}$$

Setzen wir nun $J_1(1,1) = J_0(1,1)$ so zeigt man mit Hilfe einer vollständigen Induktion, daß eine Abbildung $J_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften definiert werden kann:

$$J_1(k,j) \geq J_0(k,j); J_1(k,j) \geq k; J_1(k,j) \geq j; \text{ und } J_1(k_1,j_1)$$

$$> J_1(k_2,j_2) \text{ wenn } j_1 \geq j_2 \text{ und } k_1 > k_2, \text{ oder } j_1 > j_2 \text{ und } k_1 \geq k_2.$$

$B^2(u)$ genügt (B_6) deshalb haben wir für $\kappa \geq J_1(k,j)$:

$$\begin{aligned} (B^2(u_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_\kappa) &= (B^2(u_\kappa) - B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_\kappa) + (B^2(\tilde{u}_\kappa), u_\kappa - u_0) \\ &\quad + (B^2(\tilde{u}_\kappa), u_\kappa - u_0) \\ (23) \quad &\leq (B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_0) + \frac{\epsilon_j}{4} \end{aligned}$$

4.) von $\sum_{|\alpha| \leq m} B_\alpha^2(x, D(\tilde{u}_\kappa)(x)) (D^\alpha(\tilde{u}_\kappa - u_0)(x))$ wissen wir die punktweise

Konvergenz und deshalb $(B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_0)_{\Omega \setminus H(j)} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$

Andererseits ist wegen (B_9)

$$\begin{aligned} (B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_0)_{\Omega \cap H(j)} &\leq (B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa)_{\Omega \cap H(j)} + K_8 (B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa)_{\Omega \cap H(j)} + \\ &\quad + K_8 (B^2(u_0), u_0)_{\Omega \cap H(j)} \\ &\leq (K_8 + 1) (B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa)_{\Omega \cap H(j)} + (B^2(u_0), u_0)_{\Omega \cap H(j)}. \end{aligned}$$

Es gibt also wegen (21) zu j ein $l_3(j)$ derart, daß für $k \geq l_3(j)$:

$$(B^2(\tilde{u}_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_0) \leq \frac{\epsilon_j}{2}.$$

Setzen wir $\lambda_1(j) := \max \{l_1(j), l_3(j), 1 + \lambda_1(j-1)\}$, $\lambda_1(0) = 0$;

und $\lambda_2(j) = J_1(\lambda_1(j), j)$, so gilt für $\kappa \geq \lambda_2(j)$ und $k = \lambda_1(j)$:

$$(B^2(u_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_\kappa) \leq \epsilon_j. \text{ Lemma 8 ist damit bewiesen.}$$

Bemerkung: Da wir in Lemma 7 und Lemma 8 nur elementare Tatsachen der Maßtheorie verwenden, gelten beide Lemmata nicht nur für Ω , sondern auch für die Mengen Ω_1 und $\Omega_3 := \Omega \setminus \Omega_1$.

Beweis von Satz 5:

Wir können den Beweis von Satz 4 bis einschließlich (17) übernehmen. Aus (13) und (B_1) folgt $(B^2(u_k), u_k) \leq C$. Die Voraussetzungen von Lemma 7 sind damit erfüllt und zwar wegen (A_1, iii) und (B_1, iii) sowohl für Ω als auch für Ω_1 und $\Omega_3 := \Omega \setminus \Omega_1$. Für Ω_1 gilt Lemma 8 Teil i). Setzen wir zu $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty$ aus (17) $\epsilon_j := \epsilon_k$ für $j=k$, so finden wir zu ϵ_j ein $\lambda(j)$, so daß für $\kappa \geq k$ und $k \geq \lambda(j)$ gilt:

$$(24) \quad (B^2(u_\kappa), \tilde{u}_\kappa - u_\kappa)_{\Omega_1} \leq \epsilon_j, \text{ dabei ist } u_\kappa := u_k \text{ für } \kappa = k.$$

Wir setzen $\tilde{u}_i := \tilde{u}_k$ für $k = \lambda(i)$ und $u_i = u_\kappa$ für $\kappa = \lambda(i)$.

Dann genügen $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^\infty$ und $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ (17), dabei ist $\tilde{u}_i = \sum_{n=v_2(i)}^{v_3(i)} \omega_n^i u_n$

mit $v_2(i) := v_0(\lambda(i))$, $v_3(i) := v_1(\lambda(i))$ und $n_0(i) := v_3(i)$.

Es ist wieder $(B^2(u_i), u_i)_{\Omega_3} \leq C$, so daß Lemma 7 und Lemma 8 Teil ii) für Ω_3 gelten. Zu $\epsilon_j > 0$ gibt also $\lambda_1(j)$ und $\lambda_2(j)$, so daß für $i = \lambda_1(j)$ und $i \geq \lambda_2(j)$ mit $u_i := u_j$ für $i = i$ gilt:

$$(25) \quad (B^2(u_i), \tilde{u}_i - u_i)_{\Omega_3} \leq \epsilon_j.$$

Wir definieren $u_j := u_i$ für $i = \lambda_2(j)$; und $\tilde{u}_j = \tilde{u}_i$ für $i = \lambda_1(j)$; also ist $u_j = u_\kappa$ für $\kappa = \lambda(\lambda_2(j))$; und $\tilde{u}_j = \tilde{u}_k$ für $k = \lambda(\lambda_1(j))$; und da $\lambda(\lambda_2(j)) \geq \lambda(\lambda_1(j))$, und $\lambda_2(j) \geq \lambda_1(j) \geq j$, folgt mit (24) und (25):

$$(26) \quad (B^2(u_j), \tilde{u}_j - u_j)_\Omega \leq 2 \epsilon_j.$$

Damit haben wir aus $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^\infty$ und $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ Teilfolgen $\{\tilde{u}_j\}_{j=1}^\infty$ und $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ so ausgewählt, daß $\limsup (B^2(u_j), \tilde{u}_j - u_j) \leq 0$.

Definieren wir noch $v_4(j)$, $v_5(j)$ und $n_1(j)$ aus $\mathbb{N}$ durch

$$v_4(j) := v_2(\lambda_1(j)) = v_0(\lambda(\lambda_1(j))); \quad v_5(j) := v_3(\lambda_1(j)) = v_1(\lambda(\lambda_1(j)));$$

und $n_1(j) := v_1(\lambda(\lambda_2(j)))$, so gilt $n_1(j) \geq v_5(j)$, da $\lambda_2(j) \geq \lambda_1(j)$.

Insgesamt haben wir:

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_j = \sum_{n=v_4(j)}^{v_5(j)} \omega_n^j u_n \quad \text{mit} \quad \sum_{n=v_4(j)}^{v_5(j)} \omega_n^j = 1 \quad \text{und} \quad \omega_n^j \geq 0; \\ \text{und} \quad |I(u_n) - K_5| \leq \frac{\varepsilon_j}{4} \quad \text{für} \quad n \geq v_4(j). \\ u_j \text{ ist Galerkin Lösung in } V_{n_1(j)} \quad \text{und} \quad \tilde{u}_j \in V_{n_1(j)}. \\ \text{Für } j \rightarrow \infty \text{ gelten die Konvergenzen:} \\ u_j \rightarrow u_0, \quad \tilde{u}_j \rightarrow u_0 \quad \text{in } W_0^{m,p}(\Omega), \quad D^\alpha(\tilde{u}_j)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x) \text{ f.ü. } |\alpha| \leq m, \\ D^\alpha(u_j) \rightarrow D^\alpha(u_0) \quad \text{für } |\alpha| \leq m-1, \quad D^\alpha(u_j)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x) \text{ f.ü. } |\alpha| \leq m-1. \end{array} \right.$$

Wegen (13) und (26) ist nun:

$$2\varepsilon_j + (f, u_j - \tilde{u}_j) \geq - (B^2(u_j), u_j - \tilde{u}_j) + (f, u_j - \tilde{u}_j) = (A(u_j), u_j - \tilde{u}_j)$$

Wir haben also $\limsup (A(u_j), u_j - \tilde{u}_j) \leq 0$, so daß Lemma 3 und

Lemma 4 gelten. Damit ist die punktweise Konvergenz von $D^\alpha(u_j)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x)$ f.ü. für $|\alpha| \leq m$ gesichert. Wie im Beweis von Satz 1 (§ 3) folgt nun aus $(A(u_j), u_j) \leq C$, $(B^2(u_j), u_j) \leq C$ und $(A_1), (A_3)$ bzw. $(B_1), (B_7)$:

$$A_\alpha(\cdot, D(u_j)) \rightarrow A_\alpha(\cdot, D(u_0)) \quad \text{und} \quad B_\alpha^2(\cdot, D(u_j)) \rightarrow B_\alpha^2(\cdot, D(u_0)) \quad \text{in } L^1(\Omega),$$

und daraus $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ und $\mathcal{A}_2(u_0) = f$.

Satz 5 ist damit bewiesen.

§ 7 Der unbeschränkte Operator $B^3(u)$ niedrigerer Ordnung.

Wir wollen zum Abschluß noch den Fall betrachten, daß $A(u)$ durch einen Operator der Form $\sum_{|\alpha| \leq m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha^3(\cdot, D^{(0,m-1)}(u))$ gestört wird

Für B^3 fordern wir neben B_1, B_7 eine Bedingung, wie sie F.E. Browder in [3] verwendet, wobei wir auf die volle Allgemeinheit verzichten, um den Beweis übersichtlicher gestalten zu können:

(B_{10}) Zu $\epsilon > 0$ gibt es K_ϵ , so daß für $\xi^{(0,m-1)}, \eta^{(0,m-1)} \in \mathbb{R}^{S(0,m-1)}$

$$\begin{aligned} \text{gilt:} \\ \sum_{|\alpha| \leq m-1} B_\alpha^3(x, \xi^{(0,m-1)}) \eta_\alpha^2 \leq \epsilon \sum_{|\alpha| \leq m-1} B_\alpha^3(x, \xi^{(0,m-1)}) \xi_\alpha^2 + \\ + K_\epsilon \sum_{|\alpha| \leq m-1} B_\alpha^3(x, \xi^{(0,m-1)}) \eta_\alpha^2 \end{aligned}$$

Satz 6

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, so daß die Sobolev'schen Einbettungssätze gelten. Gegeben sei der Differentialoperator

$$A(u) + B(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(\cdot, D(u)) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(\cdot, D^{(0,m-1)}(u)).$$

Für $A(u)$ gelte $(A_1), (A_2), (A_3)$ und für $B^3(u)$: $(B_1), (B_7), (B_{10})$.

Dann gibt es zu $f \in L$ eine schwache Lösung des Dirichletproblems,

wenn $((A(u), u) + (B^3(u), u)) (||u||_{m,p})^{-1} \rightarrow \infty$ für $||u||_{m,p} \rightarrow \infty$ und $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Beweis:

Wir übernehmen sinngemäß bis einschließlich (17) den Beweis von Satz 4. Wir wollen wieder geeignete Teilfolgen von $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^\infty$ und $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ so auswählen, daß eine zu (26) analoge Abschätzung gilt, und setzen wieder $\epsilon_j = \epsilon_k$ für $k = j$.

1.) Wegen $(A_1), (B_1)$ und (13) gibt es $K_{11} > 0$, so daß

$$(28) \quad 0 \leq (B^3(u_k), u_k) = K_{11}$$

Aus (17) und (B_1) folgt:

$$B_\alpha^3(x, D^{(0,m-1)}(u_k)(x)) \cdot (D^\alpha(u_k)(x)) + B_\alpha^3(x, D^{(0,m-1)}(u_0)(x)) \cdot (D^\alpha(u_0)(x)) \text{ f.ü.}$$

Wegen (B_1, iii) können wir das Lemma von Fatou anwenden:

Es ist also $\sum_{|\alpha| \leq m-1} B_\alpha^{(0, m-1)}(u_0) (D^\alpha(u_0)) \in L^1(\Omega)$ und es gibt

zu ϵ_j ein $l_4(j)$, so daß für $k \geq l_4(j)$.

$$(29) \quad (B^3(u_k), u_k) \geq (B^3(u_0), u_0) - \frac{\epsilon_j}{4}.$$

Es ist für $u_\kappa := u_k$; wenn $\kappa = k$

$$(30) \quad (B^3(u_\kappa), \tilde{u}_k - u_\kappa) \leq ((B^3(u_\kappa), \tilde{u}_k) - (B^3(u_0), \tilde{u}_k)) + ((B^3(u_0), \tilde{u}_k) - (B^3(u_0), u_0)) \\ + ((B^3(u_0), u_0) - (B^3(u_\kappa), u_\kappa)).$$

2.) Wegen (28), (17) und (B_1) , (B_7) können wir wie in Beweis von Satz 1 (§ 3) schließen:

$$B_\alpha^{(0, m-1)}(u_k) \rightarrow B_\alpha^{(0, m-1)}(u_0) \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Da $D^\alpha(\tilde{u}_k) \in L^\infty(\Omega)$, gibt es Zahlen $J_0(k, j) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $\kappa \geq J_0(k, j)$

$$(31) \quad |(B^3(u_\kappa), \tilde{u}_k) - (B^3(u_0), \tilde{u}_k)| \leq \frac{\epsilon_j}{4}.$$

Definieren wir $J_1(k, j)$ durch $J_0(k, j)$ wie in Beweis von Lemma 8, so gilt (31) auch für $\kappa \geq J_1(k, j)$.

3.) Wir betrachten noch $(B^3(u_0), \tilde{u}_k - u_0)$ und setzen für eine reelle Funktion ϕ : $\phi^+ := \begin{cases} \phi & \text{für } \phi > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Mit Hilfe des Satzes von Vitali zeigen wir:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} B_\alpha^{(0, m-1)}(u_0) \right) D^\alpha(u_k - u_0)^+ dx \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Die punktweise Konvergenz ist klar. Sei $\epsilon > 0$ gegeben, so setzen wir $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2K_{11}}$ und wählen $\delta(\epsilon) > 0$ so, daß

$$(K_{\epsilon},) \cdot (B^3(u_0), u_0)_{\Omega} \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } \Omega' \text{ mit } \mu(\Omega') \leq \delta(\epsilon).$$

Da auch für die anfängliche Folge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Galerkinlösungen gilt:

$$(B^3(u_n), u_n)_{\Omega} \leq K_{11}, \text{ können wir mit } (B_1) \text{ und (17) abschätzen:}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} B_{\alpha}^3(., D^{(0, m-1)}(u_0)) \cdot D^{\alpha}(\tilde{u}_k - u_0) \right)^+ dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha| \leq m-1} (B_{\alpha}^3(., D^{(0, m-1)}(u_0)) D^{\alpha}(\tilde{u}_k)) ^+ dx \\ & \leq \int_{\Omega'} \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \sum_{|\alpha| \leq m-1} (B_{\alpha}^3(., D^{(0, m-1)}(u_0)) \cdot D^{\alpha}(u_n)) ^+ dx \\ & \leq \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^k \cdot \epsilon' \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha| \leq m-1} B_{\alpha}^3(., D^{(0, m-1)}(u_n)) \cdot D^{\alpha}(u_n) dx + \\ & + \sum_{n=v_0(k)}^{v_1(k)} \omega_n^{k K_{\epsilon}} \cdot (B^3(u_0), u_0)_{\Omega'} \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt also $l_5(j)$, so daß für $k \geq l_5(j)$:

$$(32) \quad (B^3(u_0), \tilde{u}_k - u_0) \leq \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m-1} (B_{\alpha}^3(., D^{(0, m-1)}(u_0)) \cdot D^{\alpha}(\tilde{u}_k - u_0)) ^+ dx \leq \frac{\epsilon_j}{2}$$

4.) Setzen wir $\lambda_3(j) = \max \{l_4(j), l_5(j), 1 + \lambda_3(j-1)\}$ und $\lambda_3(0) = 0$;

so ist für $\kappa \geq J_1(\lambda_3(j), j)$; $k = \lambda_3(j)$ wegen (29), (30), (31) und (32):

$$(B^3(u_{\kappa}), \tilde{u}_k - u_{\kappa}) \leq \frac{\epsilon_j}{4} + \frac{\epsilon_j}{2} + \frac{\epsilon_j}{4} \leq \epsilon_j.$$

Wir definieren $u_j := u_{\kappa}$ für $\kappa = J_1(\lambda_3(j), j)$, $\tilde{u}_j := \tilde{u}_k$ für

$$k = \lambda_3(j) \text{ und } v_6(j) := v_0(\lambda_3(j)), v_7(j) := v_0(\lambda_3(j)),$$

$n_2(j) = v_1(j_1(\lambda_3(j), j))$. Wegen $j_1(\lambda_3(j), j) \geq \lambda_3(j)$ gilt

$$n_2(j) \geq v_7(j).$$

Wir haben also wieder aus $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ und $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ Teilfolgen

$\{\tilde{u}_j\}_{j=1}^{\infty}$ und $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit den folgenden Eigenschaften ausgewählt:

Zur positiven Nullfolge $\{\epsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ gilt:

$$(33) \left\{ \begin{array}{l} u_j = \sum_{n=v_6(j)}^{v_7(j)} \omega_n^j u_n, \text{ mit } \sum_{n=v_6(j)}^{v_7(j)} \omega_n^j = 1, \omega_n^j \geq 0, \text{ und} \\ | \phi(u_n) - K_5 | \leq \frac{\epsilon_j}{4}; \text{ f\"ur } n \geq v_6(j). \\ u_j \text{ ist Galerkinl\"osung in } V_{n_2(j)} \text{ und } \tilde{u}_j \in V_{n_2(j)} \\ (B^3(u_j), \tilde{u}_j - u_j) \leq \epsilon_j. \\ \text{F\"ur } j \rightarrow \infty \text{ gelten die Konvergenzen:} \\ u_j \rightarrow u_0, \tilde{u}_j \rightarrow u_0 \text{ in } W_0^{m,p}(\Omega); D^\alpha(\tilde{u}_j)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x) \text{ f.\"u. } |\alpha| \leq m; \\ D^\alpha(u_j) \rightarrow D^\alpha(u_0) \text{ f\"ur } |\alpha| \leq m-1; D^\alpha(u_j)(x) \rightarrow D^\alpha(u_0)(x) \text{ f.\"u. } |\alpha| \leq m-1. \end{array} \right.$$

Wie im Beweis von Satz 5 k\"onnen wir daraus schließen $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_3)$ und $\mathcal{L}_3(u_0) = f$.

Satz 6 ist damit bewiesen.

Literatur:

- [1] Browder, F.E.: Problèmes nonlinéaires, University of Montreal Press 1966.
- [2] Browder, F.E.: Existence theorems for nonlinear partial differential equations. Proc. Sympos. Pure Math. 16, 1 - 60, Providence R.I. Am. Math. Soc. 1970
- [3] Browder, F.E.: Existence theory for boundary value problems for quasilinear elliptic systems with strongly lower order terms Proc. Sympos. Pure Math. 17, 269 - 286. Providence R.I. Am. Math. Soc. 1971.
- [4] Carathéodory, D.C.: Vorlesung über reelle Funktionen , Leipzig 1918 .
- [5] Gossez, J.P.: Opérateurs monotones non linéaires dans les espaces de Banach non reflexifs. J. Math. Anal. Appl. 34, 371 - 395, 1971.
- [6] Gossez, J.P.: Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients. Trans. Am. Math. Soc. 190, 163 - 205, 1974.
- [7] Hess, P.: A strongly nonlinear elliptic boundary value problem. J. Math. Anal. App. 43, 241 - 249, 1973.
- [8] Hewitt, E., Stromberg, K.: Real and Abstract Analysis 2nd ed. Springer Verlag, Berlin, 1969.
- [9] Leray, J., Lions, J.L.: Quelques résultats de Visik sur le problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder. Bull. Soc. Math. France 93, 97 - 107, 1965.
- [10] Morrey, Jr. C.B.: Multiple Integrals in the calculus of variation Springer Berlin 1969.
- [11] Simader, C.G.: Über schwache Lösungen des Dirichletproblems für strenge nichtlineare elliptische Differentialgleichungen, Math. Z. 150, 1 - 26, 1976 .
- [12] Ton, Bui An.: Pseudo-monoton operators in Banach-spaces and nonlinear elliptic equations. Math. Z., 121, 243 - 252 1971.
- [13] Yosida, K.: Functional Analysis 3rd ed. Springer Berlin 1971.

Lebenslauf

Geburtsdatum- und Ort: Harlanden, Kreis Ingolstadt / D.
6. April 1947

Eltern: Paul Landes und Margarete Landes
geb. Wiebe

Schule:
September 1953 - Oktober 1955 Volksschule Oberdolling
Kreis Ingolstadt / D

Oktober 1955 - Juli 1958 Volksschule Westenhausen
Kreis Pfaffenhofen / Ilm

September 1958 - Juli 1967 Christoph - Scheiner Gymnasium
in Ingolstadt / D

Ziviler Ersatzdienst:
Oktober 1967 - April 1969 Altenwohnstift Augustinum
Dießen / Ammersee

Studium:
SS 1969 - SS 1971 Ludwig Maximilians Universität,
München
WS 1971/72 - WS 1973/74 Georg-August Universität, Göttingen
Februar 1974 Diplom-Prüfung, Göttingen

Tätigkeit:
seit 1. April 1974 wiss. Ass. (m.d.V.b.) an der
Ruhr Universität Bochum

